

# Chapitre 8 : Loi binomiale

## I. Schéma de Bernoulli

### 1) Définition

#### Exemples :

a) On lance un dé 5 fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

A chaque lancer, on considère comme succès : "*obtenir un six*"

et comme échec : "*ne pas obtenir un six*".

b) On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

On considère comme succès : "*obtenir Pile*" et comme échec : "*obtenir Face*".

c) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.

On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

On considère comme succès : "*obtenir une boule blanche*"

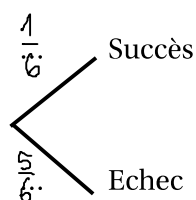
et comme échec : "*obtenir une boule noire*".

**Définition :** Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition de  $n$  expériences identiques et indépendantes à deux issues** que l'on peut nommer "**succès**" et "**échec**".

### 2) Arbre pondéré

On reprend les exemples précédents :

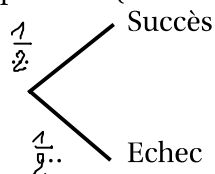
a) Pour chaque expérience (lancer de dé), on a les probabilités suivantes :



On répète cette expérience 5 fois, avec à chaque *épreuve*, une probabilité de succès égale à  $\frac{1}{6}$ ...

On dit ici que  $n = 5$ ... et  $p = \frac{1}{6}$ ... sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

b) Pour chaque expérience (lancer d'une pièce), on a les probabilités suivantes :



On effectue une expérience constituée de  $n = 10$  épreuves, avec à chaque fois, une probabilité de succès  $p = \frac{1}{2}$ ...

On dit ici que  $n = 10$ ... et  $p = \frac{1}{2}$ ... sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

c) A chaque **épreuve** (tirer une boule), on a les probabilités suivantes :



On effectue une expérience constituée de  $n = 10$  épreuves. A chaque épreuve la probabilité du succès est égale à 0,4.

On dit ici que  $n = 10$  et  $p = 0,4$  sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

**Méthode :** Représenter un schéma de Bernoulli dans un arbre pondéré

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2) Déterminer les probabilités suivantes :

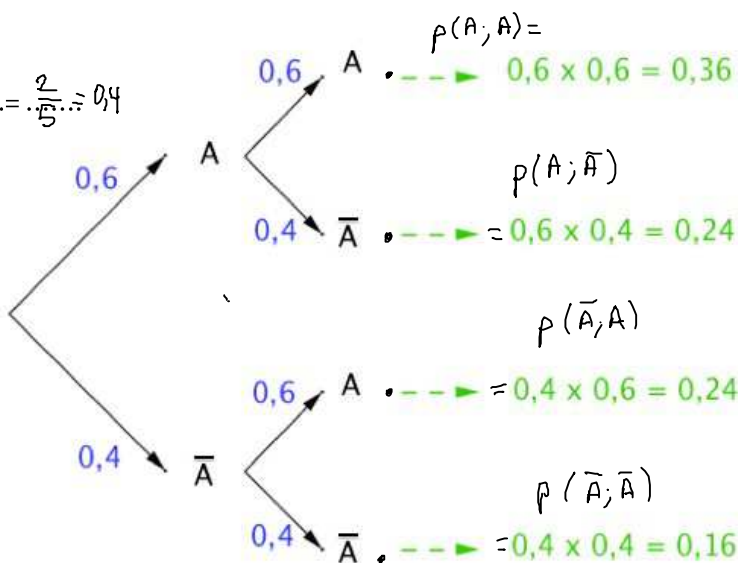
- a) On tire deux boules blanches.
- b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
- c) On tire au moins une boule blanche.

*L'urne compte 5 boules dont 3 blanches*

1) On note  $A$  l'issue "On tire une boule blanche" et  $\bar{A}$  l'issue contraire "On tire une boule rouge".

$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$  et  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré :



2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue  $(A; A)$  :

$P_1 = 0,6 \times 0,6$ ... (d'après l'arbre).

*La probabilité d'une issue est égale au PRODUIT des probabilités portées par les branches formant le chemin conduisant à cette issue.*

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues

$(A; \bar{A})$ ... et ...  $(\bar{A}; A)$  :

$P_2 = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48$ .

*La probabilité d'un événement est égale à la SOMME des probabilités des issues qui le réalisent.*

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues :  $\bar{B}$  : "obtenir au moins 1 boule blanche"

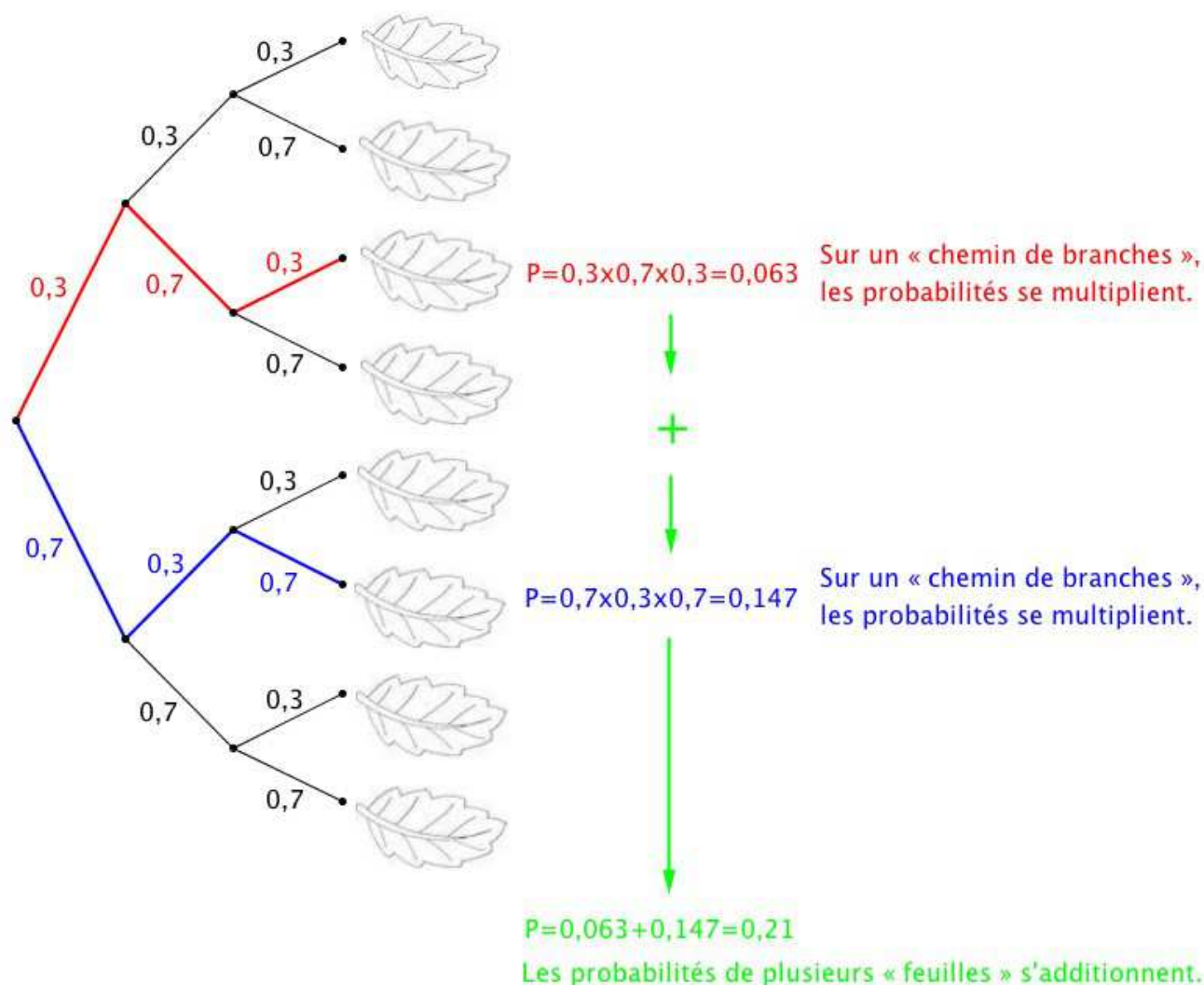
$(A; \bar{A})$ ...  $(\bar{A}; A)$  et ...  $(A; A)$  :

Remarque :  $B$  : "obtenir 2 boules rouges"

$P_3 = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,6 = 0,24 + 0,24 + 0,36 = 0,84$

$P_3 = 1 - P(B) = 1 - 0,4 \times 0,4 = 1 - 0,16 = 0,84$

### Technique de calcul sur un arbre pondéré :



## II. Loi binomiale

### 1) Variable aléatoire

#### Exemple :

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*".

On réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètre  $n = 5$  et  $p = 0,5$ .

On note  $X$  le nombre de succès.  $X$  est appelé la variable aléatoire associée au schéma.

Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note  $P(X=3)$ .

**Définition :** On réalise un schéma de Bernoulli composé de  $n$  expériences identiques et indépendantes.

La **variable aléatoire**  $X$  associée au schéma compte le nombre de succès obtenus.

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ .

Remarque :  $n$  et  $p$  sont les paramètres de la loi binomiale.

## 2) Avec un arbre pondéré

Méthode : Utiliser une loi binomiale

▶ Vidéo 1

Une urne contient 2 boules gagnantes et 8 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules gagnantes.

- Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
- Calculer la probabilité  $P(X=2)$  d'obtenir 2 boules gagnantes.
- Calculer la probabilité  $P(X \geq 2)$  d'obtenir au moins 2 boules gagnantes.

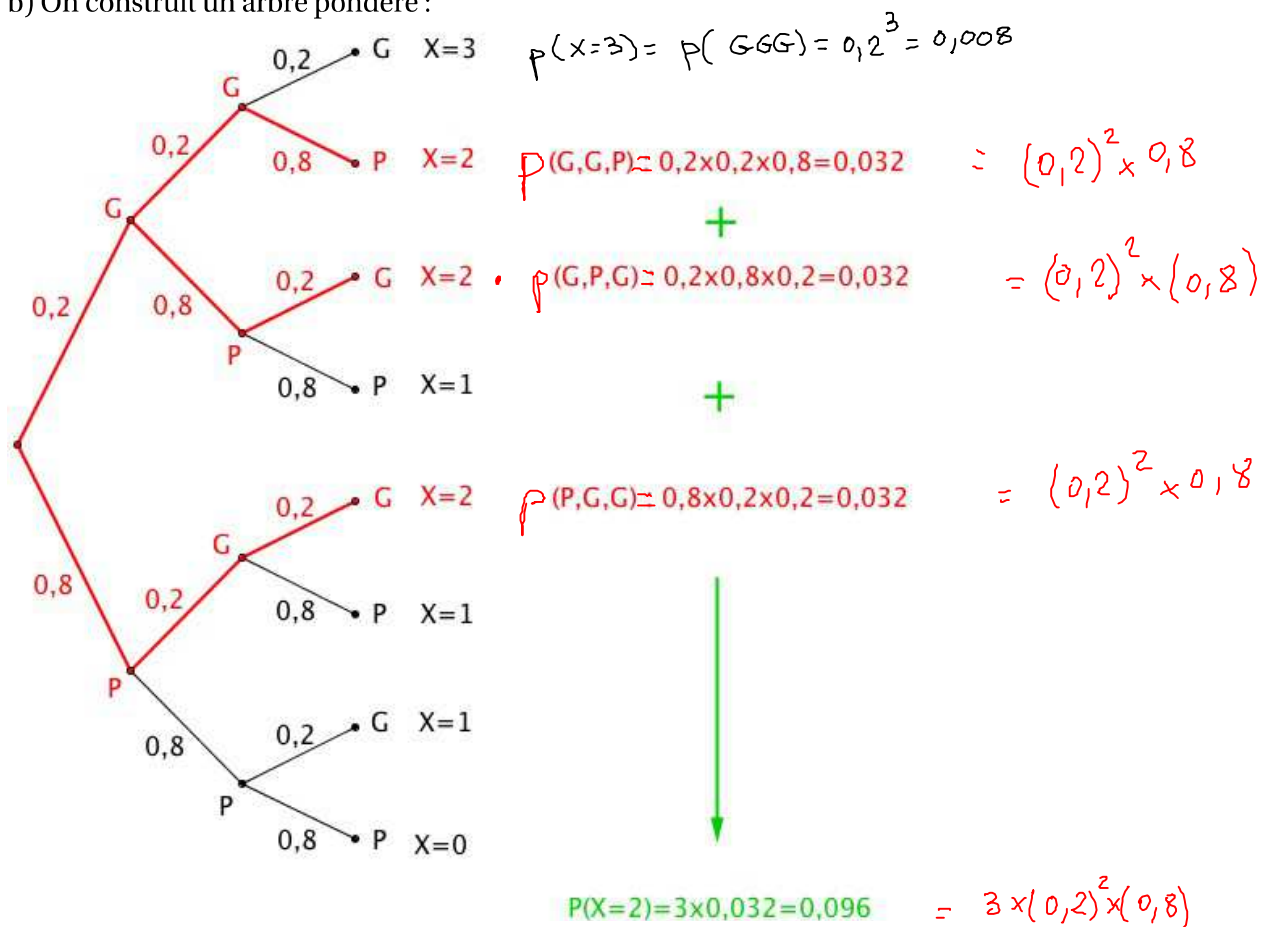
a) On répète **3 fois** une expérience à deux issues : boules gagnantes et boules perdantes.

Le **succès** est « ...obtenir une boule gagnante... ».

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à  $\dots \frac{2}{10} = 0,2$

$X$  suit donc une loi binomiale de paramètres :  $n = 3$  et  $p = 0,2$

b) On construit un arbre pondéré :



La probabilité d'obtenir 2 boules gagnantes est égale à 0,096.

- $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0,096 + 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,104$   
La probabilité d'obtenir au moins 2 boules gagnantes est égale à 0,104.

3) Avec la calculatrice ou un tableurMéthode : Utiliser une loi binomiale

▣ Vidéo 2

▣ Vidéo 3

▣ Vidéo 4

▣ Vidéo 5

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

- a) Quelle est la loi suivie par  $X$  ?  
 b) Calculer la probabilité  $P(X=5)$ .  
 c) Calculer la probabilité  $P(X \leq 5)$ .  
 d) Calculer la probabilité  $P(X \geq 3)$ .

Le succès est  $S$  : "le nombre est supérieur ou égal à 3".

- a) On considère l'épreuve de Bernoulli : "lancer un dé à 6 faces" dont le succès  $S$  est "le nombre est supérieur ou égal à 3".  
 La probabilité du succès est  $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . On répète cette expérience 7 fois de façon successive et indépendante. Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 7$  et  $p = \frac{2}{3}$ .

b) Avec Texas Instruments :Touches « 2<sup>nd</sup> » et « VAR » puis choisir « binomFdp ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

binomFdp(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM » et « Bpd ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule :

=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve  $P(X=5) \approx 0,307$  $(k; n; p; 0)$ 

La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à .....

c) Avec Texas Instruments :Touches « 2<sup>nd</sup> » et « VAR » puis choisir « binomFRép ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM » et « Bcd ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule :

=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve  $P(X \leq 5) \approx 0,737$ 

La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale

à ...0,737

- d)  $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$   
 $\approx 1 - 0,015$  (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)  
 $\approx 0,985$

$X \in \{0; 1; 2; \boxed{3; 4; 5; 6; 7}\}$   
 L'événement contraire de  $(X \geq 3)$  est  $(X \leq 2)$

4) Représentation graphiqueMéthode : Représenter une loi binomiale par un diagramme en bâtons

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre  $n = 5$  et  $p = 0,4$ .  
Représenter graphiquement la loi suivie par  $X$  par un diagramme en bâtons.  
On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant  $P(X=k)$  pour  $k$  entier,  $0 \leq k \leq 5$ .

Avec Texas Instruments :

Touche «  $Y=$  » et saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1:BinomFdf(5,0.4,X)
```

Afficher la table : Touches «  $2^{nd}$  » et « *GRAPH* » :

X	Y1
0	.07776
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.01024
6	0

X=0

Avec Casio :

Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;

Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
Table Func :Y=
Y1:BinomialPD(X,5,0.4)
```

Afficher la table : Touche « *TABL* » :

X	Y1
0	0.07776
1	0.2592
2	0.3456
3	0.2304

Avec le tableur :

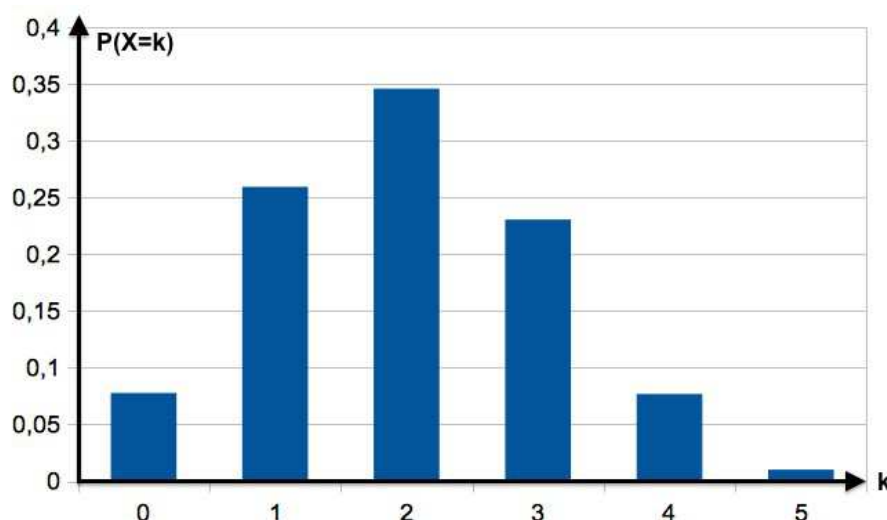
Saisir dans la cellule B1 :

=LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



### III. Espérance de la loi binomiale

**Définition :** Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé l'espérance de  $X$ .

**Propriété :** Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors :  $E(X) = n \times p$

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

#### ▣ Vidéo 6

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

On répond au hasard à chaque question.

- Combien de bonnes réponses peut-on espérer obtenir ?
- Quelle note peut-on alors espérer obtenir ?

Organisons l'information.

On considère l'épreuve de Bernoulli : « répondre au hasard à une question » dont le succès  $S$  est : « obtenir une bonne réponse ».

La probabilité du succès est  $p = \frac{1}{3}$ .

On répète cette épreuve 8 fois de façon identique et indépendante.

- Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 8$  et  $p = \frac{1}{3}$ .

$$E(X) = n \times p = 8 \times \frac{1}{3} \approx 2,67$$

En moyenne on peut espérer obtenir un peu moins de 3 bonnes réponses.

- $E(X) = \frac{8}{3}$  et chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

La note espérée est en moyenne de  $0,5 \times \frac{8}{3} \approx 1,33$ .