Feuille d'exercices sur les probabilités

Vocabulaire

Exercice 1

On écrit sur les faces d'un dé à six faces chacune des lettres du mot oiseau. On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur sa face supérieure.

1. Citer les issues de cette expérience.
2. Donner un exemple d'événement élémentaire.
3. Donner un exemple d'événement non élémentaire.

1. Citer les issues d'une expérience aléatoire revient à décrire l'univers de l'expérience aléatoire.

$\Omega = \{ O ; I ; S ; E ; A ; U \}$

2. C : "obtenir une consonne" est un événement élémentaire

$C = \{ S \}$ 1 seule issue réalise l'événement C.

$p(C) = \frac{1}{6}$

3. V : "obtenir une voyelle" est un événement non élémentaire

5 issues réalisent C.

$V = \{ O ; I ; E ; A ; U \}$ $p(V) = \frac{5}{6}$

Méthode :

- description d'un événement par une phrase introduite par 2 points, ouvrez les guillemets, et conjuguée au présent de l'indicatif, ou utilisant un verbe à l'infinitif.
- description ensembliste d'un événement en dressant les issues qui le réalisent.

Exercice 2

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à 9. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard de l'urne. On regarde le nombre inscrit sur la boule.

1. Citer les issues de cette expérience.
2. Donner un exemple d'événement élémentaire, non élémentaire, certain et impossible.

1. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

2. • E : " on obtient un multiple de 5 " est un événement élémentaire.

   1 seule issue réalise E.

   $E = \{5\}$ $\quad p(E) = \frac{1}{9}$

   • A : " on obtient un multiple de 3 " est un événement non élémentaire

   3 issues réalisent A.

   $A = \{3; 6; 9\}$ $\quad p(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

   • B : " obtenir un chiffre compris entre 1 et 9 " est un événement certain $\quad p(B) = 1$

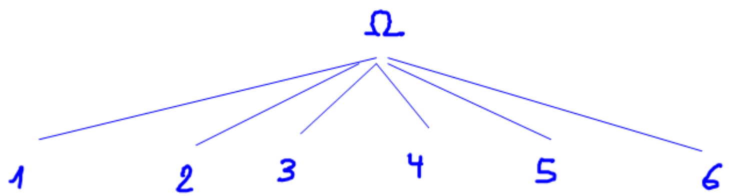
   $B = \Omega$

   • Z : " obtenir zéro " est un événement impossible. $Z = \emptyset$ $\quad p(Z) = 0$.

Probabilités

Exercice 3

On lance un dé équilibré à six faces et on regarde le nombre inscrit sur sa face supérieure.
Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire? Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants : « on obtient 3 ou 5 », « on obtient un nombre impair », « on obtient un nombre négatif »,« on obtient un nombre inférieur ou égal à 4 » et« on obtient un nombre entier ».



card $\Omega = 6$

cardinal

- un événement élémentaire est réalisé par une seule issue. Dans cette expérience aléatoire, toutes les issues sont équiprobables. On dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.

  Chaque événement élémentaire a une probabilité $p = \dfrac{1}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{1}{6}$

- A : " on obtient 3 ou 5 " $A = \{3 ; 5\}$ card $A = 2$ 2 issues réalisent A.

  On est dans une situation d'équiprobabilité donc $p(A) = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{2}{6}$

- B : " on obtient un nombre impair " $B = \{1 ; 3 ; 5\}$ $p(B) = \dfrac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

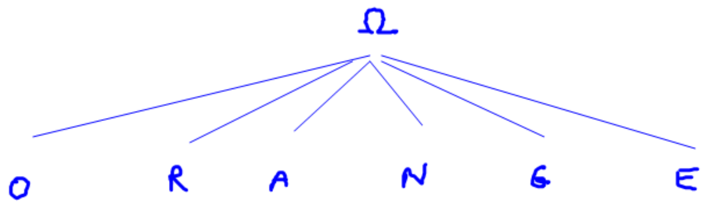
- C : "on obtient un nombre négatif" C est un événement impossible $p(C) = 0$ $C = \emptyset$
- D : " on obtient un nombre inférieur ou égal à 4 " $D = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

$$p(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{6}$$

- E : " on obtient un nombre entier " E est un événement certain $p(E) = 1$.

Exercice 4

On écrit sur les faces d'un dé équilibré à six faces chacune des lettres du mot ORANGE. On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur sa face supérieure. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants : « on obtient la lettre R », « on obtient une lettre du mot ONAGRE », « on obtient une lettre du mot CITRON », « on obtient une lettre du mot « KIWI », « on obtient une voyelle ».



card $\Omega = 6$

$\Omega = \{O; R; A; N; G; E\}$.   Le dé étant équilibré, on est dans une situation d'équiprobabilité.

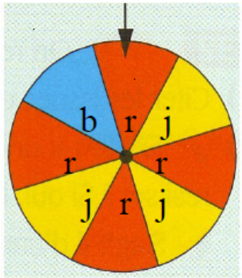
- B : " on obtient la lettre R " $B = \{R\}$ R est un événement élémentaire

  $p(B) = \frac{1}{6}$

- ONAGRE est une anagramme du mot ORANGE.

  C : " on obtient une lettre du mot ONAGRE " est donc un événement certain. $p(C) = 1$.

- D : " on obtient une lettre du mot citron " . 3 issues réalisent D. $D = \{R; O; N\}$. $p(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- K : " on obtient une lettre du mot KIWI " . K est un événement impossible $p(K) = 0$.
- V : " on obtient une voyelle " $V = \{O; A; E\}$ $p(V) = \frac{\text{card } V}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

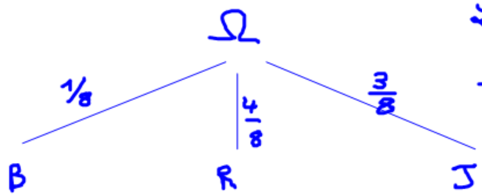


Exercice 5

On fait tourner la roue de loterie ci-contre. On admet que chaque secteur coloré a autant de chances d'être désigné.
On regarde la couleur désigné par la flèche.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants. « la couleur désignée est le bleu » « la couleur désignée est le jaune », « la couleur désignée est le rouge »
2. Déterminer de deux façons différentes la probabilité de l'événement « la couleur désignée n'est pas le rouge »

$\Omega = \{B ; R ; J\}$



Les secteurs de couleur étant semblables
Il s'agit donc d'une situation d'équiprobabilité.

1. B : " la couleur désignée est le bleu " $p(B) = \frac{1}{8}$

J : " la couleur désignée est le jaune " $p(J) = \frac{3}{8}$

R : " la couleur désignée est le rouge " $p(R) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2. $\bar{R}$: " la couleur désignée n'est pas le rouge " $p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\bar{R} = \{B ; J\}$ La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements qui le réalisent.

$p(\bar{R}) = p(B) + p(J) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Exercice 6

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants : « la carte tirée est un valet de coeur », « la carte tirée est le sept de pique », « la carte tirée est un trèfle », « la carte tirée est une dame »

on est dans une situation d'équiprobabilité. Toutes les issues ont une probabilité $p = \frac{1}{32}$

A : "la carte tirée est le valet de coeur". A est un événement élémentaire. $p(A) = \frac{1}{32}$

B : "la carte tirée est le 7 de pique". B est un événement élémentaire $p(B) = \frac{1}{32}$

C : "la carte tirée est un trèfle". $p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ En effet il y a 8 trèfles 7, 8, 9, 10, V, D, R, AS de Trèfle

D : "la carte tirée est une dame" $p(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ En effet il y a 4 dames dame de Pique, Coeur, Carreau, Trèfle

Exercice 7

Première partie : on considère une urne contenant 4 boules rouges et 1 boule jaune.
On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule de l'urne.

1) La première boule tirée étant rouge, quelle est la probabilité que la seconde soit Rouge? Jaune?
2) La première boule tirée étant jaune, quelle est la probabilité que la seconde soit Rouge? Jaune?

Deuxième partie : on considère une urne contenant 4 boules rouges et 2 boules jaunes.

3) On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on la pose sur la table, puis on tire une seconde boule de l'urne. Quelles sont les issues de cette expérience?
4) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules jaunes? 2 boules rouges ? D'obtenir au moins une boule rouge?

1) Il y a 5 boules au total. On effectue un tirage avec remise à 2 épreuves.
Les tirages sont indépendants.

R_1 : " la première boule tirée est rouge "
R_2 : " la seconde boule tirée est rouge "
J_2 : " la seconde boule tirée est jaune "
J_1 : " la première boule tirée est jaune "

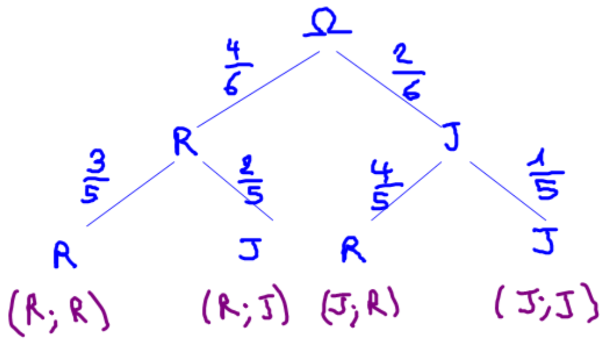
Comme les tirages sont indépendants $p_{R_1}(R_2) = p(R_2) = \dfrac{\text{card } R}{\text{card } \Omega} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad p_{R_1}(J) = p(J) = \dfrac{1}{5}$

se lit " probabilité de R_2 sachant R_1 "

2) De la même façon, $p_{J_1}(R_2) = p(R) = \frac{4}{5}$ $\qquad p_{J_1}(J_2) = p(J) = \frac{1}{5}$

3) Il y a à présent 6 boules au total : 4 rouges et 2 jaunes

Dressons un arbre afin d'illustrer cette situation



$\Omega = \{(R;R)\,;\,(R;J)\,;\,(J;R)\,;\,(J;J)\}$

Les issues sont des couples indiquant une notion d'ordre dans l'apparition des couleurs.

Rappel de cours :

La probabilité d'une ISSUE est égale au PRODUIT des probabilités portées par les branches formant le chemin conduisant à cette issue.

4) $p(J;J) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$p(R;R) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$

A : " obtenir au moins une boule rouge "

$A = \{(R;R)\,;\,(R;J)\,;\,(J;R)\}$ $\qquad p(A) = p(R;R) + p(R;J) + p(J;R)$

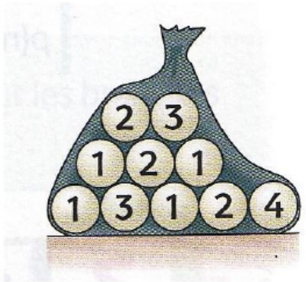
Rappel de cours :

La probabilité d'un EVENEMENT est égale à la SOMME des probabilités des issues qui le réalisent.

A l'aide de l'événement contraire : $\bar{A} = (J;J)$ $\qquad p(\bar{A}) = 1 - p(J;J) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

Exercice 8

Un sac opaque contient les boules représentées ci-contre.
Un nombre de points est indiqué sur chacune d'elles.
On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.
Faire un arbre de probabilités
Calculer la probabilité de l'événement A « obtenir au moins 2 points »



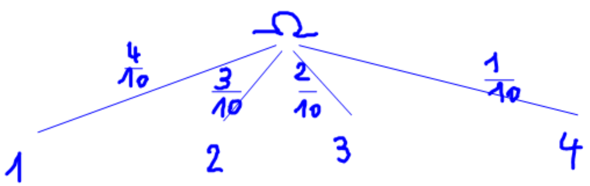
1ère méthode :

A : " obtenir au moins 2 points "

Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans une situation d'équiprobabilité

$p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0{,}4$

2ème méthode : Avec l'arbre (consigne de l'énoncé)



$A = \{2 ; 3 ; 4\}$ $\quad p(A) = p(2) + p(3) + p(4) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{6}{10}$

Astuce ! $\bar{A}$: " obtenir 1 " $\quad p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \dfrac{4}{10} = \dfrac{6}{10}$

Exercice 9

Dans une urne, on place 100 boules numérotées 00, 01, 02, … , 98, 99. On tire au hasard une boule et on lit le numéro. Calculer la probabilité de l'événement A « 9 ne figure pas dans le numéro »

Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans une situation d'équiprobabilité. card $\Omega = 100$

$\bar{A}$: "9 figure dans le numéro"

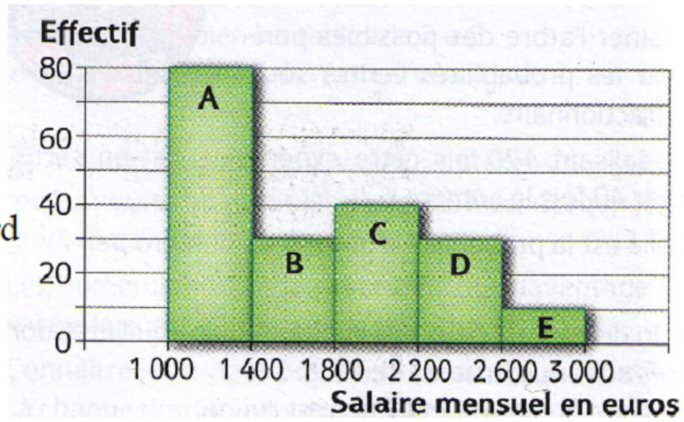
$\bar{A} = \{09 ; 19 ; 29 ; 39 ; 49 ; 59 ; 69 ; 79 ; 89 ; 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99\}$

$p(\bar{A}) = \dfrac{\text{card } \bar{A}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{19}{100} = 0{,}19$

$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}19 = 0{,}81$

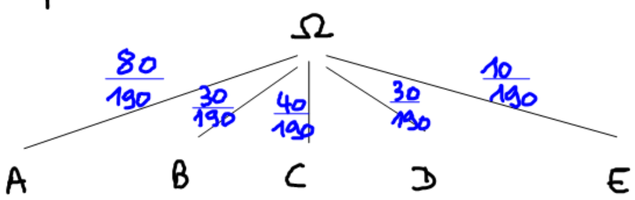
Exercice 10

Voici la répartition des salaires dans une entreprise.
On compte cinq classes A, B, C, D et E.
On a rencontré un salarié de cette entreprise au hasard et on lui demande sa classe de salaire.



1) Dessiner l'arbre des probabilités.
2) Quelle est la probabilité de l'événement V : « la classe de salaire est désignée par une voyelle »
3) Quelle est la probabilité de l'événement P:« la salarié gagne plus de 1400€ »

1) Déterminons l'effectif de l'entreprise $N = 80 + 30 + 40 + 30 + 10 = 190$



Pour des raisons pédagogiques, j'ai choisi de laisser $\frac{80}{190}$ $\frac{30}{190}$ etc…

il aurait été plus intéressant d'écrire $\frac{8}{19}$ $\frac{3}{19}$ $\frac{4}{19}$ $\frac{3}{19}$ $\frac{1}{19}$

2) $V = \{A ; E\}$ $\quad p(V) = p(A) + p(E)$

$$= \frac{8}{19} + \frac{10}{19}$$
$$= \frac{18}{19}$$

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalisent.

3) $\overline{P} = A$ $\quad p(P) = 1 - p(A) = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{19}$

Il faut penser à utiliser l'événement contraire

Exercice 11

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces son numérotées de 1 à 6.
L'un de ces dés est vert, et l'autre est rouge. On lance les deux dés et on note d'abord le nombre sorti sur le dé vert, puis celui sur le dé rouge.

1) Quelle est la probabilité de chaque issue?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir les mêmes numéros sur les deux dés?
3) Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 4?
4) Quelle est la probabilité que la somme soit strictement supérieure à 7?

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(2 ; 1)	(3 ; 1)	(4 ; 1)	(5 ; 1)	(6 ; 1)
2	(1 ; 2)	(2 ; 2)	(3 ; 2)	(4 ; 2)	(5 ; 2)	(6 ; 2)
3	(1 ; 3)	(2 ; 3)	(3 ; 3)	(4 ; 3)	(5 ; 3)	(6 ; 3)
4	(1 ; 4)	(2 ; 4)	(3 ; 4)	(4 ; 4)	(5 ; 4)	(6 ; 4)
5	(1 ; 5)	(2 ; 5)	(3 ; 5)	(4 ; 5)	(5 ; 5)	(6 ; 5)
6	(1 ; 6)	(2 ; 6)	(3 ; 6)	(4 ; 6)	(5 ; 6)	(6 ; 6)

$\text{card}\,\Omega = 36$

1) on a 36 issues équiprobables de probabilité $p = \frac{1}{36}$

2) A : " les 2 numéros sont identiques " 6 issues (sur la diagonale) réalisent A. $p(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3) B : " la somme des 2 numéros est égale à 4 " $B = \{(3;1);(1;3);(2;2)\}$ $p(B) = \frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

4) C : " la somme des 2 numéros est strictement supérieure à 7 "
$C = \{(2;6);(3;5);(3;6);(4;4);(4;5);(4;6);(5;3);(5;4);(5;5);(5;6);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$ $p(C) = \frac{\text{card}\,C}{\text{card}\,\Omega} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

EXERCICE 12

Dans une entreprise, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des salariés ont été absents au moins 1 jour ; 30% des salariés ont été absents au moins 2 jours ; 15% des salariés ont été absents au moins 3 jours ; 10% des salariés ont été absents au moins 4 jours ; 5% des salariés ont été absents au moins 5 jours.
On choisit au hasard un salarié de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que ce salarié :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année ?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année ?
3. ait été absent au plus 3 jours ?

Méthode : Penser à l'événement contraire.

1. Soit A l'événement : " le salarié n'a jamais été absent au cours de cette année "

$\bar{A}$: " le salarié a été absent au moins une fois au cours de l'année "

$p(\bar{A}) = 0,4$ donc $p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

2. B : " le salarié a été absent une seule journée "

Définition : variable aléatoire

une variable aléatoire est une fonction qui à toute issue d'une expérience aléatoire associe un nombre réel.

Soit X la variable aléatoire qui à tout salarié associe le nombre de jour d'absences.

$p(A) = p(X=0)$ $p(B) = p(X=1)$. D'après l'énoncé $p(X \geq 1) = p(\bar{A}) = 0,4$; $p(X \geq 2) = 0,3$ $p(X \geq 3) = 0,15)$ $p(X \geq 4) = 0,1$

$p(B) = p(X = 1)$

$(X \geq 2) = \{2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$ $\quad p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + \dots$

$(X \geq 1) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$ $\quad p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + \dots$

on a donc $p(X = 1) = p(X \geq 1) - p(X \geq 2)$

$= 0{,}4 - 0{,}3$

$= 0{,}1$

10% des employés ont eu exactement un jour d'absence.

3. C : " le salarié a été absent au plus 3 jours "

$C = (X \leq 3)$ $\quad \overline{C} = (X > 3) = (X \geq 4)$

$p(C) = 1 - p(\overline{C})$

$= 1 - p(X \geq 4)$

$= 1 - 0{,}1$

$\boxed{p(C) = 0{,}9}$

EXERCICE 13

On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes.

card Ω = 32

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   a) R : « la carte est un roi » ;
   b) F : « la carte est une figure » ;
   c) C : « la carte est un cœur ».
2. Décrire l'événement $F \cap C$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap C)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup C)$ d'obtenir une figure ou un cœur.

1) a) Il y a 4 rois dans le jeu et on est dans une situation d'équiprobabilité $p(R) = \dfrac{\text{card } R}{\text{card } \Omega} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

b) Il y a 3 figures par couleur et 4 couleurs soit 12 figures $p(F) = \dfrac{\text{card } F}{\text{card } \Omega} = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$

c) Il y a 8 cartes par couleur $p(C) = \dfrac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

2). $F \cap C$: " la carte tirée est une figure qui est un cœur ". $p(F \cap C) = \dfrac{\text{card}(F \cap C)}{\text{card } \Omega} = \dfrac{3}{32}$

$F \cup C$: " obtenir une figure ou un cœur " $p(F \cup C) = p(F) + p(C) - p(F \cap C) = \dfrac{12}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{3}{32} = \dfrac{17}{32}$

Remarque : Formule de cours $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On dit que $p(A \cup B)$ et $p(A \cap B)$ jouent des rôles symétriques : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$

EXERCICE 14

On choisi au hasard un nombre entre 1 et 36.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : « le nombre est un multiple de 3 »
   - B : « le nombre est un multiple de 4 »
   - C : « le nombre est un multiple de 9 »
   - D : « le nombre est premier »
2. Calculer la probabilité des évènements : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap \overline{C}$.

On est dans une situation d'équiprobabilité.

1. • $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; \dots 36\}$

Comment dénombrer card A sans énumérer toutes les issues qui réalisent A.

Etre Multiple de 3 signifie, figurer dans la table de 3

3×1
3×2
⋮
3×12

Il y a donc 12 issues qui réalisent A.

$p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

• $36 = 4 \times 9$ donc card B = 9 $\quad p(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

• $36 = 9 \times 4$ donc card C = 4 $\quad p(C) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

• $D = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$

$p(D) = \dfrac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \dfrac{11}{36}$

2) $A \cap B$: " le nombre est un multiple de 3 et de 4 "

Les issues qui réalisent $A \cap B$ sont les issues de A qui sont aussi dans B.

$A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36\}$

$B = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36\}$

3 issues réalisent $A \cap B$ $\quad p(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

remarque : ce sont les multiples de $3 \times 4 = 12$ ...

• $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{12}{36} + \dfrac{9}{36} - \dfrac{3}{36} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

En effet $A \cup B = \{3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20; 21; 24; 27; 28; 30; 32; 33; 36\}$

• $A \cap \overline{C}$: " le nombre est un multiple de 3 mais pas de 9 ". $A \cap \overline{C} = \{3; 6; 12; 15; 21; 24; 30; 33\}$ $\quad p(A \cap \overline{C}) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

EXERCICE 15

Les résultats d'une enquête sur l'audience de deux magazines A et B, sont les suivants :
3 % de la population lit les deux magazines. Le magazine A est lu par 12 % de la population tandis que le magazine B est lu par 7 % de la population.
On interroge une personne de cette population au hasard.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise pas le magazine A.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise aucun des deux magazines.

Organisons l'information avant de répondre aux questions

- A : "la personne interrogée lit le magazine A" $p(A) = 0{,}12$
- B : "la personne interrogée lit le magazine B" $p(B) = 0{,}07$
- $A \cap B$: "la personne interrogée lit les 2 magazines" $p(A \cap B) = 0{,}03$

1) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0{,}88$

2) $\bar{A} \cap \bar{B}$: "la personne ne lit ni le magazine A, ni le magazine B" commentaire : en somme, la personne lit 0 magazine

c'est l'événement contraire de l'événement $A \cup B$: "la personne lit au moins un magazine".

En effet, soit X la variable aléatoire associé au nombre de magazines lus par une personne interrogée au hasard. $X \in \{0 ; 1 ; 2\}$

$(X \geqslant 1)$ est l'événement contraire de $(X = 0)$

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - [0{,}12 + 0{,}07 - 0{,}03] = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

EXERCICE 16

Une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon représentatif de la population d'une municipalité afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.
L'enquête révèle que 60 % des habitants pratiquent le tri sélectif, 55 % des habitants sont sensibles au développement durable, et, la moitié de la population est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
On interroge au hasard un habitant de cette ville. On considère les évènements suivants :

— D : La personne interrogée est sensible au développement durable.

— T : La personne interrogée pratique le tri sélectif.

1. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne pratique pas le tri sélectif ?
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée est sensible au développement durable ou pratique le tri sélectif.
3. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne soit pas sensible au développement durable et ne pratique pas le tri sélectif.

On commence par organiser l'information avant de répondre aux questions.

$p(T)=0{,}6 \quad p(D)=0{,}55 \quad p(D\cap T)=0{,}5$

1. $p(\overline{T})=1-p(T)=0{,}4$

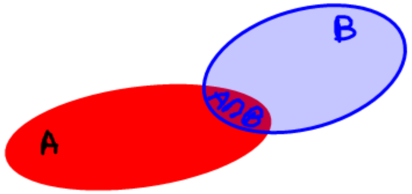
2. $p(D\cup T)=p(D)+p(T)-p(D\cap T)=0{,}55+0{,}6-0{,}5=0{,}65$

3. $p(\overline{D}\cap\overline{T})=1-p(D\cup T)=1-0{,}65=0{,}35$

Méthode vue dans l'exercice 15.

EXERCICE 17

Deux maladies A et B affectent les animaux d'un pays.
On estime que 12% des animaux sont atteints de la maladie A, 8% des animaux sont atteints de la maladie B et 3% des animaux sont atteints des deux maladies.
On prend un animal de ce pays au hasard.



1. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint seulement de la maladie A.
2. Calculer la probabilité que cet animal ne soit pas malade.

A : " l'animal est atteint de la maladie A " $\quad p(A) = 0{,}12$

B : " l'animal est atteint de la maladie B " $\quad p(B) = 0{,}08$

$A \cap B$: " l'animal est atteint de la maladie A et de la maladie B " $\quad p(A \cap B) = 0{,}03$

1. $A \cap \overline{B}$: " l'animal est atteint uniquement de la maladie A "

$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}12 - 0{,}08 = 0{,}04$

2. $\overline{A} \cap \overline{B}$: " l'animal n'est pas malade " $\quad \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

donc $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A \cup B)$

$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)]$

$= 1 - [0{,}12 + 0{,}08 - 0{,}03]$

$= 1 - 0{,}17$

$= 0{,}83$

A retenir :

$\boxed{\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}}$

EXERCICE 18

Un fabriquant de lentilles hydrophiles a constaté à l'issue de la fabrication, que ces lentilles peuvent présenter deux types de défauts : un rayon de courbure défectueux ou une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
Au cours d'une semaine, on a constaté que 6 % des lentilles présentent au moins un des deux défauts, 5 % des lentilles présentent un rayon de courbure défectueux et 3 % présentent une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
On prélève une lentille au hasard dans cette production et on note :

— A l'évènement : « la lentille prélevée présente un rayon de courbure défectueux » ;

— B l'évènement : « la lentille prélevée présente une perméabilité à l'oxygène défectueuse ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement « la lentille prélevée au hasard ne présente aucun défaut ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement « la lentille prélevée au hasard présente les deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement C : « la lentille prélevée au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

Organisons l'information : $p(A \cup B) = 0{,}06$ $\quad p(A) = 0{,}05$ $\quad p(B) = 0{,}03$

1. $\bar{A} \cap \bar{B}$: "la lentille ne présente aucun défaut" $\qquad \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B)$
$= 1 - 0{,}06$
$= 0{,}94$

2. $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
$= 0{,}05 + 0{,}03 - 0{,}06$
$= 0{,}02$

3. Considérons l'événement contraire. $\bar{C}$: "la lentille n'a aucun défaut ou a 2 défauts". $\bar{C} = \{\bar{A} \cap \bar{B} ; A \cap B\}$ $\quad p(\bar{C}) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) + p(A \cap B)$
$= 0{,}94 + 0{,}02$
$= 0{,}96$

$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - 0{,}96$
$= 0{,}04$

Autre méthode pour la question 3

Q_1 : "la lentille n'a que le défaut A"

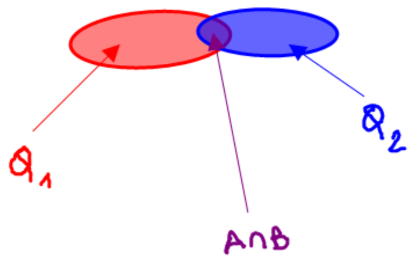
Q_2 : "la lentille n'a que le défaut B"

$p(Q_1) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}03$

$p(Q_2) = p(B) - p(A \cap B) = 0{,}01$

$C = \{Q_1 ; Q_2\}$

$p(C) = p(Q_1) + p(Q_2) = 0{,}04$



EXERCICE 19

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.
Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés *a* et *b*.
On prélève un article au hasard et on note, A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut *a* » et B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut *b* ».
On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0{,}05$; $p(B) = 0{,}06$.

1. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

Organisons l'information :

$p(A \cup B) = 0{,}1$. (10% des articles fabriqués sont défectueux)

1. $A \cup B$: « l'article présente au moins un défaut » $p(A \cup B) = 0{,}1$ — on a bien fait de commencer par organiser l'information !

2. $\overline{A \cup B}$: "l'article ne présente aucun défaut" $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 0{,}9$

3. $A \cap B$: "l'article présente les 2 défauts"

$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$ — symétrie de la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= 0{,}05 + 0{,}06 - 0{,}1$

$= 0{,}01$

4. C : "l'article n'a qu'un seul défaut". — 2 méthodes comme dans l'exercice 18.

$C = \{Q_1 ; Q_2\}$ $p(C) = p(Q_1) + p(Q_2) = 0{,}09$

$p(Q_1) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}04$

$p(Q_2) = p(B) - p(A \cap B) = 0{,}05$

2ème méthode pour la question 4 :

$\overline{C}$: " l'article ne présente aucun défaut ou 2 défauts "

$\overline{C} = \{\overline{A} \cap \overline{B} ; A \cup B\}$

$p(\overline{C}) = p(\overline{A} \cap \overline{B}) + p(A \cap B)$

$= 0{,}9 + 0{,}01$

$= 0{,}91$

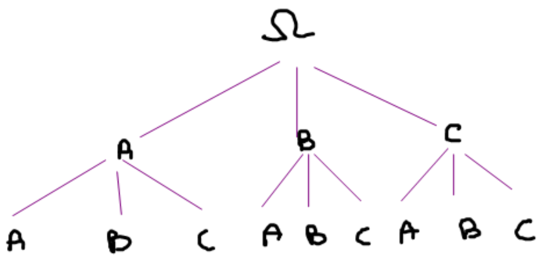
donc $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 0{,}09$

EXERCICE 20

On considère un alphabet   formé des trois lettres A, B et C.

1. Avec cet alphabet on écrit un mot de deux lettres. Quelle est la probabilité que ce mot soit écrit avec deux lettres différentes ?
2. Quelle est la probabilité d'écrire un mot de trois lettres différentes ?

1. Il s'agit d'une expérience à 2 épreuves, avec remise . card $\Omega = 9$



Toutes les issues sont équiprobables.

1. D_1 : " le mot est écrit avec 2 lettres différentes "

$\overline{D_1}$: " le mot est écrit avec 2 lettres identiques "

3 issues réalisent $\overline{D_1}$ donc 6 issues réalisent D_1

$$p(D_1) = \frac{\text{card } D_1}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2. Il s'agit d'une expérience à 3 épreuves, avec remise . card $\Omega = 3^3 = 27$

D_2 : " les 3 lettres sont différentes "   0 lettre identique

card $D_2 = 3!$ c'est le nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6.$

$D_2 = \{(A;B;C); (A;C;B); (B;A;C); (B;C;A); (C;A;B); (C;B;A)\}$ $p(D_2) = \frac{6}{27}$

Exercice de dénombrement

EXERCICE 21

On lance trois fois de suite un dé équilibré et on forme un nombre avec les résultats obtenus : par exemple, si on tire 4,3 et 3 on obtient : 433.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ? Quelle est la probabilité d'obtenir 433 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres tous différents ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé seulement des chiffres 1 ou 2 ?

1. On a 6 choix possibles pour le chiffre des centaines ; 6 choix possibles pour le chiffre des dizaines ; 6 choix possibles pour le chiffre des unités. Si on réalise un arbre afin de représenter l'univers des possibles, à chaque épreuve, une branche se divise en 6 branches. $\text{card}\,\Omega = 6^3 = 6\times6\times6 = 216$

   433 représente 1 des 216 issues équiprobables. A : " obtenir 433 " est un événement élémentaire. $p(A) = \frac{1}{216}$

2. B : " on obtient 3 chiffres différents " . Evaluons card B.

   Pour le 1er chiffre on a 6 choix possibles, mais 5 seulement pour le deuxième, et enfin 4 pour le troisième.

   $\text{card}\,B = 6\times5\times4 = 120$ $\quad p(B) = \frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

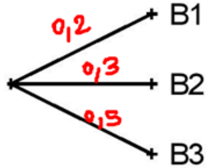
3. C : " le nombre est composé seulement des chiffres 1 ou 2 "

   $C = \{111 ; 112 ; 121 ; 122 ; 211 ; 212 ; 221 ; 222\}$ $\quad p(C) = \frac{\text{card}\,C}{\text{card}\,\Omega} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$

Exercice 22 :

Dix boîtes d'apparence identique contiennent des pièces. Certaines de ces pièces sont vraies et les autres sont fausses. Les boîtes sont de trois types : B1 ; B2 et B3. Il y a 2 boîtes de type B1, 3 boîtes de type B2 et 5 boîtes de type B3. $2+3+5=10$

1. On choisit d'abord une boîte au hasard.
Compléter et pondérer l'arbre de probabilité ci-contre :



2. Le tableau ci-dessous indique la répartition des pièces dans les boîtes selon leur type :

Type de boîte	B1	B2	B3	TOTAL
Nombre de fausses pièces	400	200	100	700
Nombre total de pièces	2 000	500	1 000	3500

On tire au hasard une pièce dans l'une des boîtes et on définit les deux événements :

- F= « La pièce est fausse »
- V= « La pièce est vraie »

Calculer p(F) et p(V) si la boîte dans laquelle on effectue le tirage est du type : B1, B2 ou B3

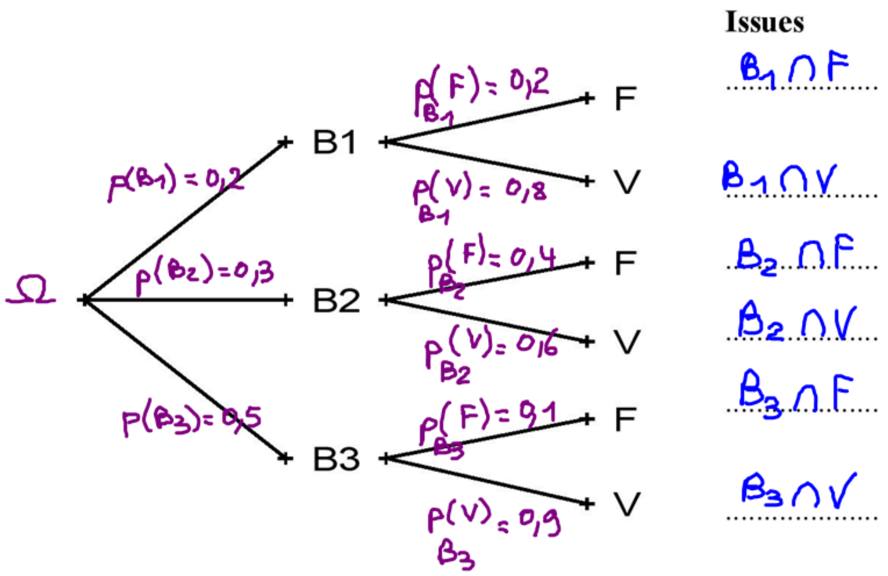
Dans cette question, on a affaire à des probabilités conditionnelles.

3. On choisit une boîte au hasard puis, encore au hasard, on tire une pièce dans cette boîte.
Compléter l'arbre pondéré des probabilités de cette expérience à deux épreuves :

2. $p_{B1}(F)$ est la probabilité de l'événement « F sachant B_1 » $p_{B_1}(F) = \frac{400}{2000} = 0,2$ $p_{B2}(F) = \frac{200}{500} = 0,4$ $p_{B_3}(F) = \frac{100}{1000} = 0,1$

On en déduit donc $p_{B_1}(V) = 0,8$ $p_{B2}(V) = 0,6$ $p_{B2}(F) = 0,9$

3. On construit un arbre à 2 niveaux.
Les probabilités portées par les branches de 1er niveau sont des probabilités simples. Les probabilités de niveaux supérieurs sont des probabilités conditionnelles.



4. a) Calculer p (B1et F) , p (B2 et F) , p (B3 et F).

b) En déduire la probabilité de l'événement F : « La pièce que la personne a tirée est fausse. »

5. On mélange toutes les pièces dans une grande caisse, puis on tire au hasard une pièce.

a) Quelle est la probabilité que la pièce tirée soit fausse ?

b) Que constate-t-on ?

4. a) Propriété : la probabilité d'une ISSUE est égale au PRODUIT des probabilités portées par les branches formant le chemin conduisant à cette issue

$p(B_1 \cap F) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$; $p(B_2 \cap F) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$; $p(B_3 \cap F) = 0,5 \times 0,1 = 0,05$.

b) 3 issues réalisent l'événement F. $F = \{B_1 \cap F ; B_2 \cap F ; B_3 \cap F\}$. Propriété : la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

$p(F) = p(B_1 \cap F) + p(B_2 \cap F) + p(B_3 \cap F) = 0,04 + 0,12 + 0,05 = 0,21$

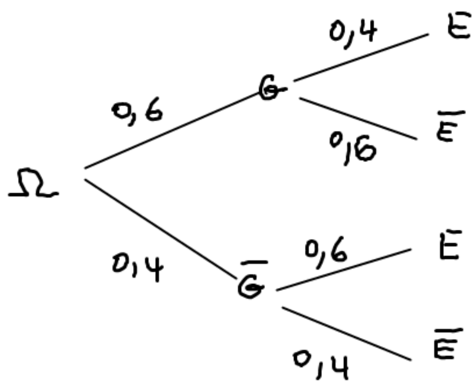
Exercice 23 :

Un groupe d'élèves de troisième comprend 60 % de garçons et 40 % de filles. Tous étudient l'anglais en LV1. 60 % des garçons étudient l'allemand en LV2, les autres étudient l'espagnol. 40 % des filles étudient l'allemand en LV2, les autres étudient l'espagnol. On choisit au hasard un élève du groupe.

1. Dessiner l'arbre pondéré des probabilités relatif au problème posé. Préciser toutes les issues.
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard soit un garçon qui étudie l'allemand ?
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille qui étudie l'allemand ?
4. Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard étudie l'allemand ?

- G : « l'élève est un garçon »
- E : " l'élève étudie l'espagnol en LV2 "
- $\bar{E}$: "l'élève étudie l'allemand en LV2"
- $\bar{G}$: " l'élève est une fille "

1)



- $G \cap E$
- $G \cap \bar{E}$
- $\bar{G} \cap E$
- $\bar{G} \cap \bar{E}$

L'expérience comporte 4 issues

$\Omega = \{ G \cap E \, ; \, G \cap \bar{E} \, ; \, \bar{G} \cap E \, ; \, \bar{G} \cap \bar{E} \}$

2) $G \cap \bar{E}$: " l'élève est un garçon qui étudie l'allemand " $p(G \cap \bar{E}) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$

3) $\bar{G} \cap \bar{E}$: " l'élève est une fille qui étudie l'allemand " $p(\bar{G} \cap \bar{E}) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

4) $\bar{E}$: " l'élève étudie l'allemand " 2 issues réalisent $\bar{E}$ $\bar{E} = \{ G \cap \bar{E} \, ; \, \bar{G} \cap \bar{E} \}$ $p(\bar{E}) = p(G \cap \bar{E}) + p(\bar{G} \cap \bar{E}) = 0{,}36 + 0{,}16 = 0{,}52$

Exercice 24 :

Annie range dans une boîte des bons de réduction. Cette boîte contient :

- 3 bons de réduction pour la lessive ;
- 4 bons de réduction pour du fromage.

1. Annie tire au hasard un bond de la boîte. Annie garde dans sa main le premier bon qu'elle a tiré , puis tire au hasard un second bon.

a) Tracer l'arbre pondéré des probabilités de cette expérience à deux épreuves. Préciser toutes les issues possibles et calculer leur probabilité.

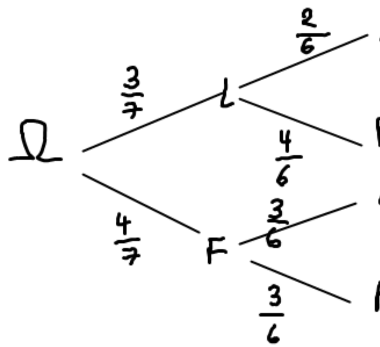
b) On considère l'événement I : « Annie a pris deux bons identiques ». Calculer p(I).

c) Quel est l'événement contraire de l'événement I ? Calculer sa probabilité.

- L : "le bon tiré est un bon de réduction pour la lessive"
- $F = \overline{L}$: "le bon tiré est un bon de réduction pour le fromage"

Organisons l'information : Il y a 7 bons de réduction. Il s'agit d'une expérience à 2 épreuves sans remise.

1. a)



issues	probabilité
$(L;L)$	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$
$(L;F)$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$
$(F;L)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$
$(F;F)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

b) $I=\{(L;L);(F;F)\}$

$$p(I)=p(L;L)+p(F;F)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

c) $\overline{I}$: " les 2 bons sont différents "

$$p(\overline{I})=1-p(I)=\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

Exercice 25 :

A a rentré scolaire, on fait une enquête dans une classe de Troisième de 25 élèves : 48 % des élèves ont 14 ans ; $\frac{1}{5}$ ont 16 ans ; les autres ont 15 ans.

1. On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande son âge.
Dessiner un arbre pondéré des probabilités en vous appuyant sur l'énoncé de l'exercice.

2. Lors de cette enquête, on leur a demandé s'ils utilisaient un sac à dos ou un sac en bandoulière : $\frac{1}{6}$ des élèves de 14 ans ont un sac à dos ; $\frac{3}{8}$ des élèves de 15 ans ont un sac en bandoulière ; 60 % des élèves de 16 ans ont un sac à dos.
On interroge au hasard un élève et on lui demande son âge et le type de sac qu'il utilise.

a) Dessiner l'arbre pondéré des probabilités relatif à ce problème.

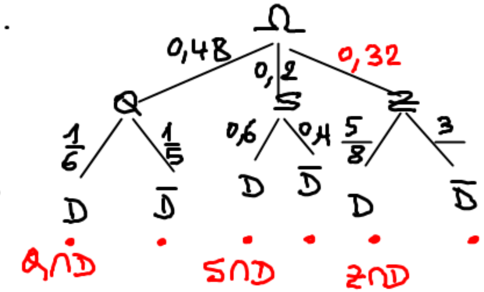
b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A= « L'élève a 14 ans et un sac à dos », B= « L'élèva a 15 ans et un sac à dos », C= « L'élève a 16 ans et un sac à dos »;

c) En déduire la probabilité que l'élève ait un sac à dos.

- Q : "l'élève a 14ans"
- S : "l'élève a 16ans"
- Z : "l'élève a 15ans"
- D : "l'élève a un sac a dos"
- $\overline{D}$: "l'élève a un sac a bandoulière"

1.

2 a).



2 b. $A = Q \cap D$ $\quad p(A) = 0{,}48 \times \frac{1}{6} = \frac{0{,}48}{6} = 0{,}06$

$B = Z \cap D$ $\quad p(B) = 0{,}32 \times \frac{5}{8} = 0{,}2$

$C = S \cap D$ $\quad p(C) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$

c. 3 issues réalisent D $\quad D = \{Q \cap D ; Z \cap D ; S \cap D\}$ $\quad p(D) = p(A) + p(B) + p(C) = 0{,}38$

Exercice 26 :

On suppose que, pour un couple, la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est la même.
Un couple souhaite avoir deux enfants.

1. Tracer l'arbre pondéré des probabilités correspondant au problème ci-dessus (il y a deux expériences successives).

2. Calculer la probabilité que le couple ait deux garçons.

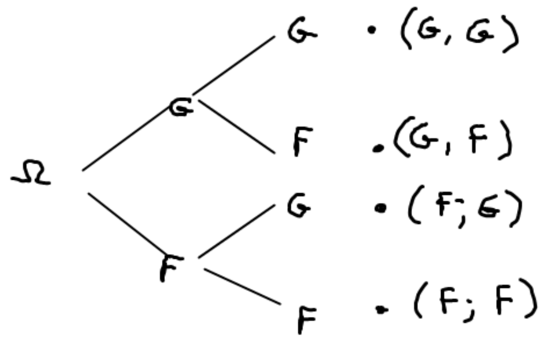
3. Calculer la probabilité que le couple ait deux enfants du même sexe ?

4. Calculer la probabilité que le couple ait un garçon en premier ?

5. Calculer la probabilité que le couple ait au moins une fille ?

Les 4 issues sont équiprobables

1)



2) $p(G ; G) = \frac{1}{4}$

3) M : "les 2 enfants sont de même sexe"

2 issues réalisent M. $p(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

4) G_1 : "le couple a un garçon en premier"

$p(G_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

5) A : "le couple a au moins une fille". 3 issues réalisent A. $p(A) = \frac{3}{4}$