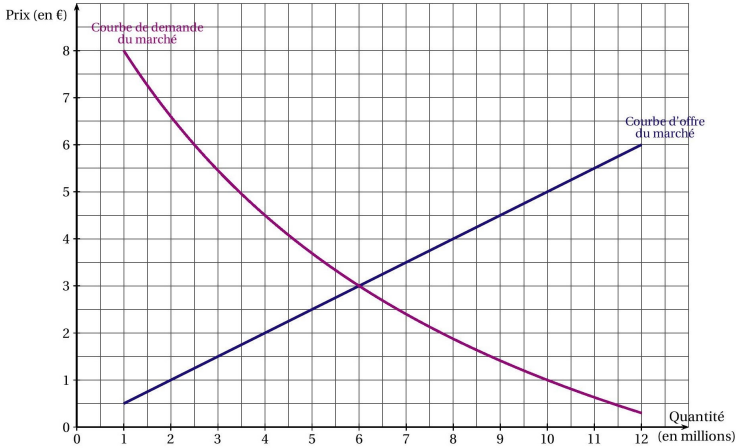
Correction du devoir maison

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$

— la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78-6q}{q+8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. À l'aide du graphique précédent, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

1. L'antécédent de 1 par la fonction f est 2.
   L'antécédent de 1 par la fonction g est 10.
   Quand le prix de vente est de 1 €, on a donc une offre de 2 millions d'articles pour une demande de 10 millions d'articles.
   La demande est **donc** excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.

2. a) La quantité d'articles offerte sur le marché à un prix de 4,50 € correspond (en millions) à l'antécédent de 4,5 par la fonction f.

$$f(q) = 4{,}5 \quad \Leftrightarrow 0{,}5q = 4{,}5$$
$$\Leftrightarrow q = 9$$

Lorsqu'un article est vendu à 4,50 €, l'offre est de 9 millions de pièces.

b) La quantité d'articles demandée sur le marché à un prix de 4,50 € correspond (en millions) à l'antécédent de 4,5 par la fonction g.

$$g(q) = 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \frac{78-6q}{q+8} = 4{,}5$$

Méthode de l'égalité des produits en croix

$$\Leftrightarrow 78-6q = 4{,}5(q+8)$$
$$\Leftrightarrow 78-6q = 4{,}5q+36$$
$$\Leftrightarrow 78-36 = 4{,}5q+6q$$
$$\Leftrightarrow 10{,}5q = 42$$
$$\Leftrightarrow q = 4$$

Lorsqu'un article est vendu à 4,50 €, la demande est de 4 millions de pièces.

Remarque : ce résultat est cohérent avec la lecture graphique que l'on peut effectuer à l'aide des courbes. La question précisait « calculer ».

c) L'offre est supérieure à la demande : cela pose un problème de stockage avec un risque d'invendus.

3. Le marché est à l'équilibre lorsque la quantité offerte est égale à la demande exprimée, mathématiquement lorsque $f(q) = g(q)$, graphiquement, lorsque les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent c'est-à-dire pour $q = 6$.
Par lecture graphique, on observe que le prix correspondant de l'article est de 3€

D'une part $f(6) = 0{,}5\text{x}6 = 3$ D'autre part : $g(6) = \dfrac{78-6\text{x}6}{6+8} = \dfrac{78-36}{14} = \dfrac{42}{14} = 3$

Donc pour $q = 6$ le marché est bien à l'équilibre.

Déterminons par le calcul cette conjecture graphique (cela n'était pas demandé) :
☑ Méthode à revoir pour de prochains contrôles !

$$f(q) = g(q) \quad \Leftrightarrow 0{,}5q = \frac{78-6q}{q+8}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5q(q+8) = 78-6q$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5q^2+4q = 78-6q$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5q^2+4q+6q-78 = 0$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5q^2+10q-78 = 0$$

Mise sous forme canonique afin de résoudre l'équation

Posons $P(q) = aq^2+bq+c = a(q-\alpha)^2+\beta$

$a = 0{,}5$ $b = 10$ $c = -78$

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -10$ $\beta = P(\alpha) = P(-10) = -128$

$$\Leftrightarrow 0{,}5(q+10)^2-128 = 0$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5(q+10)^2 = 128$$
$$\Leftrightarrow (q+10)^2 = 256$$
$$\Leftrightarrow q+10 = \sqrt{256} \quad \text{ou} \quad \Leftrightarrow q+10 = -\sqrt{256}$$

absurde ! q>0 dans l'exercice

$$\Leftrightarrow q+10 = 16$$
$$\Leftrightarrow q = 16-10$$
$$\Leftrightarrow q = 6$$