Correction du DST durée 2H00

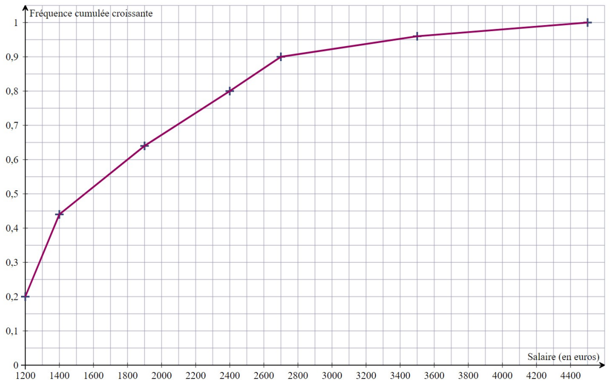
Exercice 1 : ____7 points

A la suite d'une enquête statistique portant sur les salaires mensuels bruts au sein d'une entreprise, on a relevé les résultats suivants :

Salaires en euros	1200	1400	1900	2400	2700	3500	4500	Total
Effectifs ECC	10 10	12 22	10 32	8 40	5 45	3 48	2 50	50
Fréquences cumulées croissantes	20%	44%	64%	80%	90%	96%	100%	

1. On commence par prendre l'initiative d'ajouter une colonne total. Puis on ajoute la ligne des ECC. Il suffira de diviser par l'effectif total pour obtenir les FCC, ou bien multiplier par 2 pour obtenir les FCC en pourcentage, le total étant de 50 ! Organisation de l'information…Astuce… !!

2. Diagramme des fréquences cumulées croissantes :



3. Calcul du montant du salaire brut moyen :

$$\bar{x} = \frac{10x1200+12x1400+10x1900+8x2400+5x2700+3x3500+2x4500}{50} = \frac{100\ 000}{50} = 2000$$

Le salaire mensuel brut moyen est de 2000 €.

4. Donner le montant du salaire brut médian.

D'après la distribution des fréquences cumulées croissantes, 44 % des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 1400 euros et 64 % des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 1900 euros donc

le salaire médian est de 1900 €.

5. Pourcentage de la masse salariale totale perçue par les 10% des salariés les mieux rémunérés.

D'après la distribution des FCC, 90 % des salariés ont un salaire strictement inférieur à 3500 euros :

$$\frac{3500\times 3+4500\times 2}{100000} = \frac{19500}{100000} = 0{,}195 \text{ soit } 19{,}5\%.$$

Les 10 % des salariés les mieux rémunérés perçoivent 19,5 % de la masse salariale totale.

Exercice 2 : ____6 points

— On note A l'événement : « la personne achète au moins un vêtement ».

— On note F l'événement : « la personne achète au moins un vêtement pour femme ».

— On note H l'événement : « la personne achète au moins un vêtement pour homme ».

Organisons l'information :

— On note A l'événement : « la personne achète au moins un vêtement ». On a donc $A = F \cup H$.

— 45 % des personnes qui entrent dans ce magasin ressortent du magasin sans rien acheter donc $p(\overline{A}) = 0{,}45$.

— 40 % des personnes qui entrent dans ce magasin on acheté au moins un vêtement pour femme donc $p(F) = 0{,}4$.

— 30 % des personnes qui entrent dans ce magasin ont acheté au moins un vêtement pour homme donc $p(H) = 0{,}3$.

1. A : « la personne achète au moins un vêtement ».

$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

La probabilité que la personne achète au moins un vêtement est de 0,55.

2. $F \cap H$: « personne a acheté des vêtements pour homme et des vêtements pour femme ».

$p(F \cap H) = p(F) + p(H) - p(F \cup H) = p(F) + p(H) - p(A)$

$= 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}55 = 0{,}15$.

La probabilité que la personne achète des vêtements pour hommes et des vêtements pour femme est de 0,15.

3. F_1 : « la personne n'a acheté que des vêtements pour femme ».

$F_1 = F \cap \overline{H}$

Donc $p(F_1) = p(F) - p(F \cap H)$

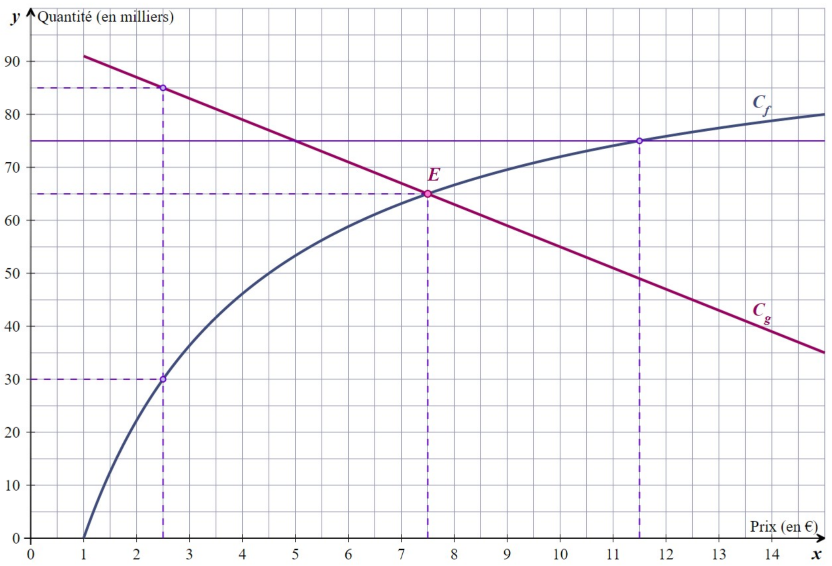
$= 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25$

La probabilité que la personne n'achète que des vêtements pour femme est de 0,25.

Exercice 3 : un air de déjà vu____14 points

Partie A : lecture graphique

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 2,50 €.



Comparons l'offre et la demande pour ce prix de vente :

Avec un prix de vente de 2,50 €, la quantité offerte par les producteurs est de 30 000 articles alors que la demande des consommateurs à ce prix est estimée à 85 000 articles. La demande est donc supérieure à l'offre.

2. Déterminons le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000 :

Pour un prix de vente supérieur à 11,50 €, le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000 articles. À ce prix, l'offre est supérieure à la demande.

3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée. Déterminons le prix d'équilibre et la quantité associée :

Le point d'intersection des deux courbes a pour coordonnées (7,5;65).

Le prix d'équilibre est de 7,50 €, l'offre est alors égale à la demande de 65 000 articles.

Partie B : la fonction demande

La demande des consommateurs est modélisée par la fonction affine g définie sur l'intervalle $[1; p]$ telle que $g(5) = 75$ et $g(10) = 55$.

1. Déterminons l'expression de g en fonction de x :

La fonction affine g est définie par $g(x) = ax + b$ avec $a = \dfrac{g(10) - g(5)}{10 - 5} = \dfrac{55 - 75}{5} = \dfrac{-20}{5} = -4$

$g(x) = -4x + b$ or $g(5) = 75$.

$-4 \times 5 + b = 75 \Leftrightarrow b = 75 + 20 = 95$

g est la fonction définie par $g(x) = -4x + 95$.

2. Déterminons le prix de vente p d'un article pour lequel la demande est nulle :

p est solution de l'équation : $-4x + 95 = 0$

$-4x + 95 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-95}{-4} = 23{,}75$

La demande des consommateurs est nulle pour un prix de vente de 23,75 €.

Partie C : la fonction d'offre

1. Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

Méthode (Rappel) : pour construire pas à pas $f(a)$ et $f(b)$, il faut suivre les étapes d'un programme de calcul très précis.

(1) choisir un nombre
(2) le multiplier par 2 ;
(3) ajouter 5 au résultat obtenu ;
(4) calculer l'inverse
(5) multiplier le résultat par (– 700)
(6) ajouter 100

(1) $1 < a < b$

(2) $2 < 2a < 2b$

(3) $7 < 2a + 5 < 2b + 5$ — $2a + 5$ et $2b + 5$ sont donc 2 réels de $]7;+\infty[$

(4) $\dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{2a+5} > \dfrac{1}{2b+5}$ — la fonction inverse est décroissante sur $]7;+\infty[$

(5) $\quad -100 < -\dfrac{700}{2a+5} < -\dfrac{700}{2b+5}$ en multipliant membre par un réel négatif, on obtient une inégalité de sens contraire.

(6) $\quad 0 < 100 - \dfrac{700}{2a+5} < 100 - \dfrac{700}{2b+5}$

soit $0 < f(a) < f(b)$

La fonction f conserve l'ordre sur $[1;+\infty[$ donc elle est croissante sur cet intervalle.

2. Résolvons l'équation $f(x) = 100$.

$$f(x) = 100 \quad \Leftrightarrow 100 - \frac{700}{2x+5} = 100$$

$$\Leftrightarrow -\frac{700}{2x+5} = 0$$: impossible d'après la règle du quotient nul

Rappel de cours : règle du quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Partie D : la fonction d'offre

Le prix d'équilibre est le réel $x \geq 1$ solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Vérifions que $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-15)(4x+45)}{(2x+5)}$.

Rappel de cours :

Méthode pour vérifier une égalité

d'une part / d'autre part

D'une part : $f(x) - g(x) \quad = 100 - \dfrac{700}{2x+5} + 4x - 95$

$$= \frac{(4x+5)(2x+5) - 700}{2x+5}$$

$$= \frac{8x^2 + 20x + 10x + 25 - 700}{2x+5}$$

$$= \frac{8x^2 + 30x - 675}{2x+5}$$

D'autre part : $(2x-15)(4x+45) = 8x^2 + 90x - 60x - 675 = 8x^2 + 60x - 675$

donc $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-15)(4x+45)}{(2x+5)}$

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

Or, d'après la règle du quotient nul :

$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow (2x-15)(4x+45) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-15) = 0$ ou $(4x+45) = 0$ d'après la règle du produit nul

$\Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$ ou $x = -\dfrac{45}{4}$

$x = \dfrac{15}{2}$ est la seule solution supérieure à 1.

De plus g(7,5)= – 30 + 95 = 65 , donc

Au prix d'équilibre de 7,50 €, 65 000 articles sont échangés entre les producteurs et les consommateurs.

Exercice 4 : ____7 points

1. Augmenter de 8% revient à multiplier par 1,08.

   Le prix d'un article de 351 € était avant la hausse, de $351 \div 1,08$ soit 325 €.

2. Diminuer de 6% revient à multiplier par 0,94. Le prix d'un article de 329 € était avant la hausse, de $329 \div 0,96$ soit 350€.

3. Le cours d'une action a successivement augmenté de 15% puis baissé de 20%.

   a. Augmenter de 15% revient à multiplier par 1,15 ; diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8. Soit t% le pourcentage global d'évolution :

   Globalement, le prix est donc multiplié par $1,15 \times 0,8 = 0,92$.

   Multiplier par 0,92 revient à diminuer de 8%.

$$1 + \frac{t}{100} = (1 + \frac{15}{100}) \times (1 - \frac{20}{100}) \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = 0,92 - 1 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 0,92 - 1 = -0,08 = -\frac{8}{100}$$

Le pourcentage d'évolution global de cette action est donc de – 8%.

   b. Si le cours initial de cette action était de 145 €, son cours final serait $145 \times 0,92 = 133,4$€

   c. Le coefficient multiplicateur $1 + \dfrac{t}{100}$ du pourcentage d'évolution réciproque est l'inverse de 0,92.

$$133,4 \times (1 + \frac{t}{100}) = 145 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \frac{133,4}{145} = \frac{1}{0,92} \quad \Leftrightarrow \frac{t}{100} = \frac{1}{0,92} - 1 \approx 0,087$$

Pour que cette action retrouve son cours initial, il faut donc qu'elle augmente de 8,7%.

Exercice 5 : ____ 6 points

Le producteur d'une émission de télévision affirme que 15% des téléspectateurs regardent cette émission chaque jour. Pour vérifier cette affirmation, on interroge un échantillon de téléspectateurs. ?

1. Sur cet échantillon de taille n = 485, la fréquence observée du caractère est $f_{obs} = \dfrac{51}{485} \approx 0,1052$

   Vérifions à l'aide de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage au seuil de 95% si les 10,52% observés sont significativement inférieurs aux 15% théoriques.

   - $n > 30$
   - $n \times p_{théo} = 485 \times 0,15 = 72,75 > 5$

   Les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage au seuil de 95% sont réunies.

   $$I_{f_{95}} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = I_{f_{95}} = \left[0,15 - \frac{1}{\sqrt{485}} ; 0,15 + \frac{1}{485}\right] = [0,1045 ; 0,1955]$$

   $f_{obs} \in I_{f_{95}}$ donc il n'y a pas lieu, au seuil de 95%, de remettre en question cette affirmation.

2. Sur cet échantillon de taille n = 703, la fréquence observée du caractère est $f_{obs} = \dfrac{72}{703} \approx 0,1024$

   Vérifions à l'aide de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage au seuil de 95% si les 10,24% observés sont significativement inférieurs aux 15% théoriques.

   - $n > 30$
   - $n \times p_{théo} = 703 \times 0,15 = 105,45 > 5$ Que peut-on en conclure ?

   Les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage au seuil de 95% sont réunies.

   $$I_{f_{95}} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = I_{f_{95}} = \left[0,15 - \frac{1}{\sqrt{703}} ; 0,15 + \frac{1}{\sqrt{703}}\right] = [0,1122 ; 0,1878]$$

   $f_{obs} \notin I_{f_{95}}$ donc l'observation effectuée sur cet échantillon, permet avec un risque inférieur à 5% de rejeter l'hypothèse selon laquelle l'affirmation du producteur est exacte. La fréquence observée est en effet significativement trop faible par rapport à l'affirmation du producteur.

3. Organisons l'information – reformulons le problème ….

   Pour que l'hypothèse ne soit pas rejetée, il faut que $f_{obs} \in I_{f_{95}}$

   $$\Leftrightarrow 0,105 \in \left[0,15 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,15 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

   $$\Leftrightarrow 0,15 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,105 \leq 0,15 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   $$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq -0,045 \text{ et } -0,045 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,045 \text{ et } -0,045 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ : toujours vrai car } \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \text{ et } -0,045 < 0$$

   On a donc à résoudre $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,045 \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{0,045} \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \left(\dfrac{1}{0,045}\right)^2$ soit $n \leq 493$.