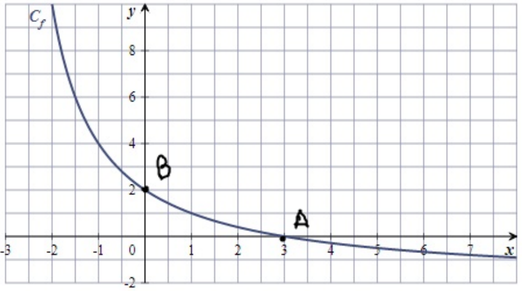
Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6-2x}{x+3}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
2. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -\dfrac{3}{2}$.



Posons $I =]-3;+\infty[$

1. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point $A(x;0)$ avec x solution de l'équation $f(x)=0$

$\forall x \in I$, $f(x) = 0 \iff \dfrac{6-2x}{x+3} = 0$

$\iff 6-2x = 0$ d'après la règle du quotient nul

$\iff x = 3$

$A(3;0)$

$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point $B(0;f(0))$ or $f(0) = \dfrac{6-0}{0+3} = 2$ donc $B(0;2)$

2) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses pour $x=3$. Pour tout $x<3$ $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses donc $f(x)>0$

Pour tout $x>3$ $\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses donc $f(x)<0$

Clairement, ce n'est pas la méthode attendue ici. Il faut obtenir ce résultat de façon algébrique.

Etude du signe du quotient $\dfrac{6-2x}{x+3}$ à l'aide d'un tableau de signes

- $6 - 2x = 0$ $\iff x = 3$
- $x + 3 = 0$ $\iff x = -3$: -3 est valeur interdite.

Dans le tableau de signes d'une expression du 1er degré de la forme $ax+b$, le signe de a est à droite du zéro.

x	-3		3		$+\infty$
$6-2x$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

En route vers l'excellence....

Remarque : la ligne $(x-3)$ est inutile.

Pour tout $x \in I$, $x > -3$
$\iff x + 3 > -3 + 3$
$\iff x + 3 > 0$: dresser une ligne de $+$ est juste une perte de temps en contrôle.

Un élève aguerri rédigera ainsi :

$\forall x \in I$ $x - 3 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $6 - 2x$.

3. $f(x) \geqslant -\dfrac{3}{2}$

$$\iff f(x) + \frac{3}{2} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{6-2x}{x+3} + \frac{3}{2} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{2(6-2x) + 3(x+3)}{2(x-3)} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{12 - 4x + 3x + 9}{2(x-3)} \geqslant 0$$

Toujours garder l'expression factorisée au dénominateur

$$\iff \frac{21 - x}{2(x-3)} \geqslant 0$$

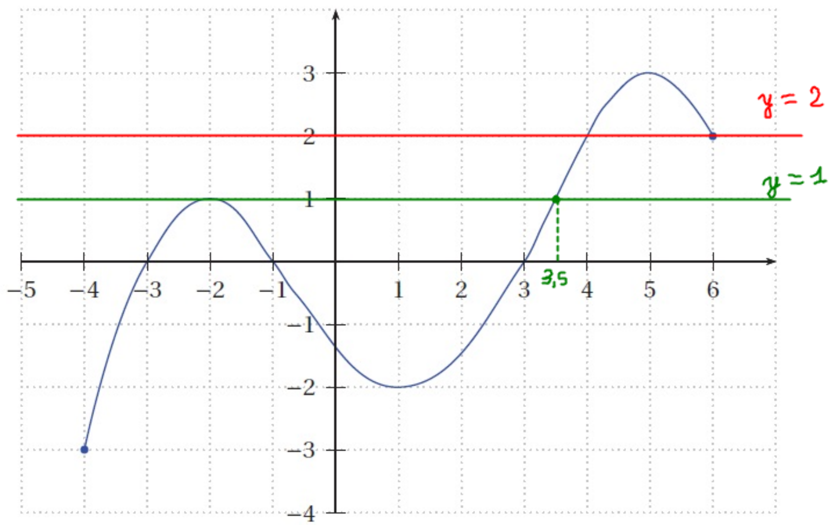
or $\forall x > 3$ $(x-3) > 0$ donc $\dfrac{21-x}{2(x-3)}$ est du signe de $21 - x$.

$\dfrac{21-x}{2(x-3)} \geqslant 0 \iff 21 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 21$

$\boxed{\text{Conclusion : } f(x) \geqslant -\frac{3}{2} \iff x \leqslant 21}$

Exercice 4

On considère la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) < 1$.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f.
5. Quel est le maximum de la fonction f sur son domaine de définition. Préciser la valeur pour laquelle il est atteint.

1)

x	-4		-3		-1		3		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $f(x) = 2 \iff x = 4$ ou $x = 6 \iff x \in \{4 ; 6\}$

3) $f(x) < 1 \iff x \in [-4 ; 3{,}5[$

4)

x	-4		-2		1		5		6
$f(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

5) $\underset{[-4;6]}{\text{Max}}\, f = 3$ pour $x = 5$