Chapitre 1 : les ensembles de nombres

I. Définitions et notations

Vidéo EDpuzzle 01 – les ensembles de nombres

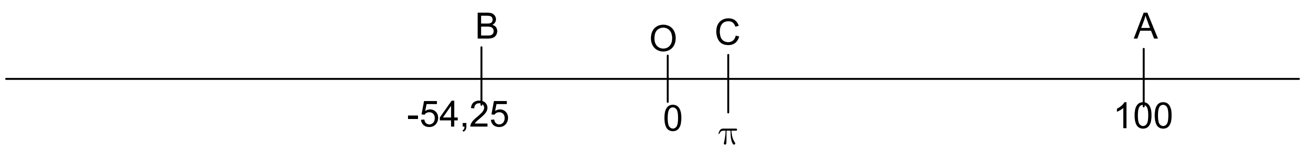
1. Les nombres réels

Définition 1: L'ensemble de tous les nombres connus en classe de seconde est appelé ensemble des réels. Il se note $\mathbb{R}$.

Définition 2: La droite numérique est une droite graduée à laquelle on associe une origine O correspondant au nombre zéro.

Définition 3 : A chaque nombre réel il correspond un unique point sur la droite numérique

Réciproquement, à chaque point de la droite, il correspond un unique nombre réel appelé **abscisse** de ce point.



Exemples :

100 ∈ $\mathbb{R}$; -54,25 ∈ $\mathbb{R}$; π ∈ $\mathbb{R}$ **Le symbole ϵ se lit « appartient à »**

100 est l'abscisse du point A. On note $x_A = 100$

-54,25 est l'abscisse du point B. On note $x_B = -54,25$

2. Nombres entiers

a) Définition 3 : entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre **entier** qui est **positif ou nul**.

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ = $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4...\}$.

Exemples : 4 est un entier naturel. On note : 4 $\in \mathbb{N}$ ce qui se lit « 4 appartient à $\mathbb{N}$»

-2 n'est pas un entier naturel. On note : -2 $\notin \mathbb{N}$ ce qui se lit « -2 n' appartient pas à $\mathbb{N}$»

⚠ Attention : **les accolades indiquent un ensemble de valeurs. Les valeurs sont séparées par des points virgules. Ne pas confondre avec les parenthèses.**

b) Définition 4 : entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre **entier** qui est **positif ou négatif** .

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

Exemples :

-124 $\in \mathbb{Z}$ 3,4 $\notin \mathbb{Z}$ 5 $\in \mathbb{Z}$ 0,33 $\notin \mathbb{Z}$

3. Nombres décimaux

Un nombre x est décimal si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$.

Un nombre décimal s'écrit donc avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$

Exemples :

0,56 $\in \mathbb{D}$ 3 $\in \mathbb{D}$ $-$ 0,258 $\in \mathbb{D}$ $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$

4. Nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un **entier** et b un **entier non nul**.

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples :

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $4 \in \mathbb{Q}$ $-4{,}8 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$ est **irrationnel**

☝ **démonstration à connaître : point méthode page 13**

Exemples :

2, 0, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$: ce sont des nombres réels

5. Inclusions

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ **appartiennent** à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

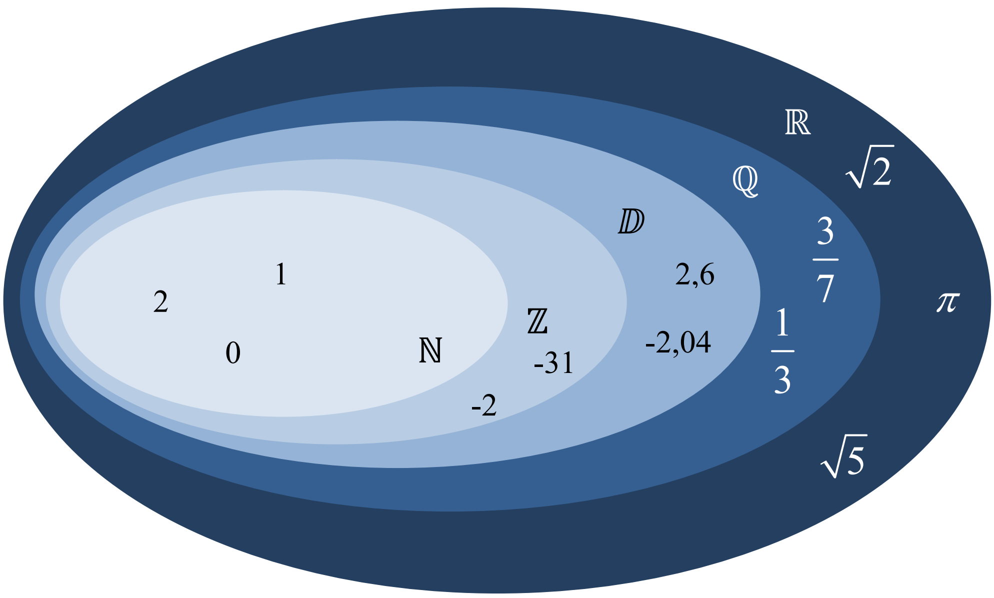
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

L'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$ contient les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres décimaux, les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

On a par ailleurs les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Remarque : ensemble vide

Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\varnothing$.

II. Les intervalles de ℝ

Vidéo EDpuzzle 02 – les intervalles

Définition 6

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Intervalles bornés

Intervalle	Inégalités vérifiées par le réel x	Représentation sur la droite graduée
$x \in [a\,;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	a b
$x \in [a\,;b[$	$a \leqslant x < b$	a b
$x \in]a\,;b]$	$a < x \leqslant b$	a b
$x \in]a\,;b[$	$a < x < b$	a b

Intervalles non bornés

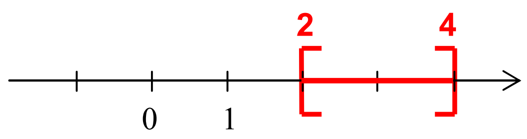
Intervalle	Inégalités vérifiées par le réel x	Représentation sur la droite graduée
$x \in [a\,;+\infty[$	$x \geqslant a$	a
$x \in]a\,;+\infty[$	$x > a$	a
$x \in]-\infty\,;a]$	$x \leqslant a$	a
$x \in]-\infty\,;a[$	$x < a$	a

▶ **Remarque**

Si a et b sont les bornes d'un intervalle, a est appelée « borne inférieure » et b « borne supérieure ».

1. Notations :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [2 ; 4]

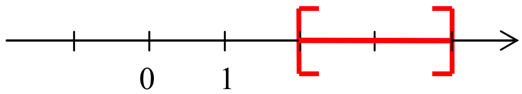
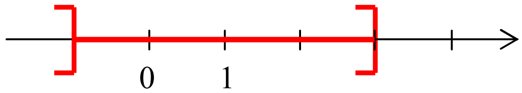
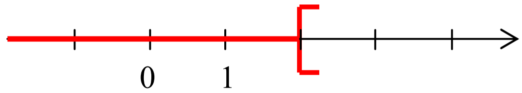
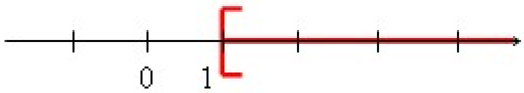
Culture : En latin, « intervallum » désignait la distance entre deux pieux.

Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : [-2 ; 7].
On a par exemple :

$4 \in [-2\,;7]$ $\qquad$ $-1 \in [-2\,;7]$ $\qquad$ $8 \notin [-2\,;7]$

Vidéo EDpuzzle : 03 – Noter les intervalles - exercice

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	] -1 ; 3]	
$x < 2$	] -∞ ; 2 [	
$x \geq 1$	[1 ; +∞ [∞ désigne l'infini	

Remarque :

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter] -∞ ; +∞ [.

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

Définitions :
On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il ouvert dans le cas contraire.

A toi de jouer ! compléter avec le symbole $\in$ ou $\notin$

- L'intervalle [-2 ; 5] est un intervalle fermé.

On a : -2 $\in$ [-2 ; 5] et 5 $\in$ [-2 ; 5]

- L'intervalle]2 ; 6[est un intervalle ouvert.

On a : 2 $\notin$]2 ; 6[et 6 $\notin$]2 ; 6[

- L'intervalle $]6;+\infty[$ est également un intervalle ouvert.

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

Vidéo EDpuzzle 05 – ensemble des solutions d'une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x-3<4$

$$\begin{aligned} & 2x-3<4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x<4+3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x<7 \\ \Leftrightarrow\ & x<\frac{7}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[$.

A toi de jouer ! (fais vérifier par le professeur ou par un camarade)
Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $-3x+8<13$

$$\begin{aligned} & -3x+8<13 \\ \Leftrightarrow\ & -3x<13-8 \\ \Leftrightarrow\ & -3x<5 \\ \Leftrightarrow\ & x>-\frac{5}{3} \end{aligned}$$

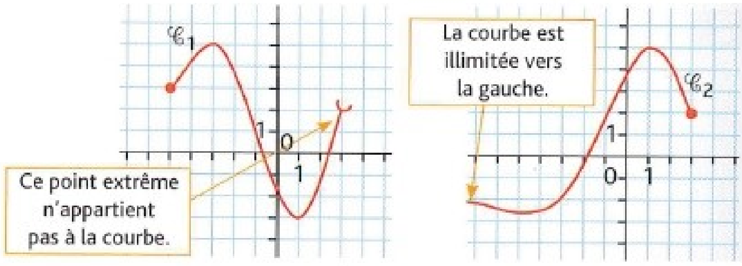
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\frac{5}{3};+\infty\right[$.

Vidéo EDpuzzle 04 – conventions graphiques

Savoir faire — Décrire un ensemble en utilisant la notation sous forme d'intervalle

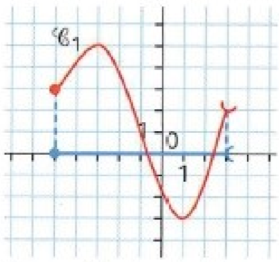
Énoncé

On considère les courbes ci-contre, en précisant dans les bulles des conventions graphiques :
Pour chaque courbe, identifier l'ensemble des abscisses de ses points.

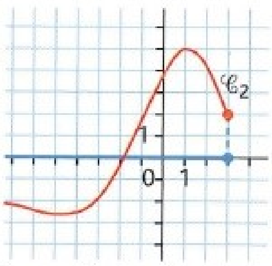


Solution rédigée

Pour chaque courbe, on lit l'ensemble des abscisses sur l'axe horizontal.



L'ensemble des abscisses est $[-5;3[$.



L'ensemble des abscisses est $]-\infty;3]$.

Conventions graphiques

- Le point noté par une « encoche » à l'extrémité n'appartient pas à la courbe.
- Le point noté par un point de la couleur de la courbe à l'extrémité appartient à la courbe.
- Le point noté par un point noir est connu avec précision.

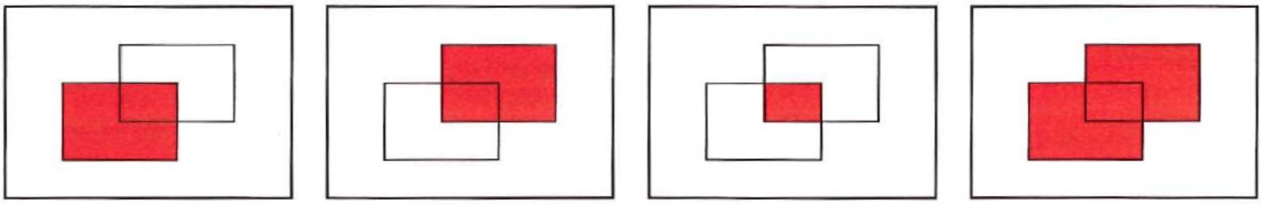
Points méthode

1. On colorie sur l'axe horizontal l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe.
2. On traduit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles l'ensemble colorié.
À chaque borne, on met un crochet ouvert ou fermé en se référant aux conventions graphiques sur l'appartenance ou non d'un point à une courbe.

3. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note **A∩B**.
- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note **A∪B.**



A B A ∩ B A ∪ B

Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

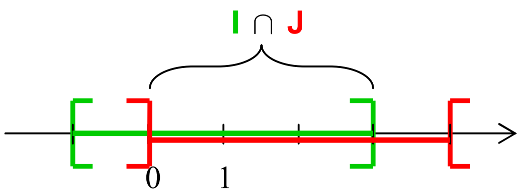
Vidéo EDpuzzle 06 – déterminer une intersection

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection des intervalles I et J :

1) I =[– 1; 3] et J =]0 ; 4[2) I =] – ∞ ; – 1 [et J = [1 ; 4]

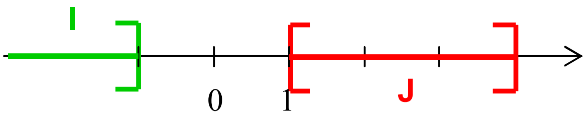
Solution :

1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent **à la fois aux deux** ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi I ∩ J =]0 ; 3].

2) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



Les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun donc I ∩ J = ∅.

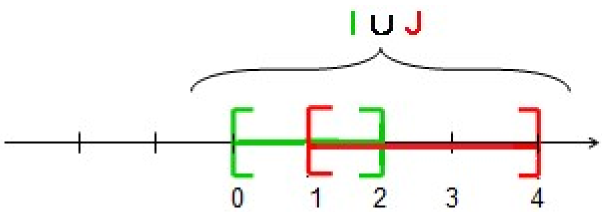
Vidéo EDpuzzle 07 – déterminer une réunion

Dans les cas suivants, déterminer la réunion des intervalles I et J :

1) I =[0 ; 2] et J = [1 ; 4] 2) I =]3 ; +∞ [et J = [– 1 ; 1]

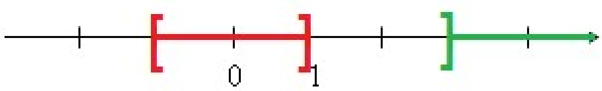
Solution :

1) Pour visualiser les ensembles solution, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent **au moins à l'un des deux** ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = [0 ;4]

2) Pour visualiser les ensembles solution, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit

par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = $]3\ ;\ +\infty[\ \cup\ [-1\ ;\ 1]$.

III. Histoire des nombres irrationnels

En latin, « ratio » signifie *compter*. Etymologiquement, un nombre irrationnel est *un nombre que l'on ne peut pas compter*. On dirait plutôt aujourd'hui, *que l'on ne peut pas écrire* car le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique. On l'oppose par définition au nombre rationnel quotient de deux entiers dont l'écriture décimale peut être infinie mais dans ce cas nécessairement périodique.
Par exemple, $\frac{2}{7}$ = 0,285714285714285714… est un nombre rationnel.

Les nombres irrationnels les plus célèbres sont π et e. Les premières décimales de π sont : 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582… Mais dans la pratique, on utilise le plus souvent 3,14. Les décimales de π ont été la proie des savants depuis près de 4000 ans. Une des plus anciennes approximations de π se trouve sur le célèbre papyrus *Rhind*.

Le nombre e ne fait son apparition qu'au XVIIe siècle avec le développement des logarithmes. Ses premières décimales sont :
2,718281828459045235360287471352662497757247093699959 57…

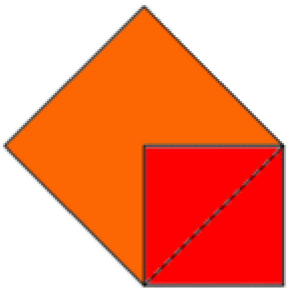
Pour en savoir plus :
Le nombre π
Le nombre e

Pour trouver les premières traces de nombres irrationnels, il faut remonter 4000 ans en arrière jusqu'aux civilisations babyloniennes. L'université de Yale possède une petite tablette de 7cm de diamètre datant de la première dynastie babylonienne (environ 1700 avant J.C) qui représente un carré et ses diagonales. Les trois séries de nombres écrits en langage cunéiforme donne une excellente approximation de $\sqrt{2}$ avec une erreur relative de 4×10^{-7}.

Tablette babylonienne (environ 1700 avant J.C)

Les Égyptiens de l'Antiquité savent également extraire les racines carrées à l'aide de nombres rationnels mais leurs approximations ne sont que très vagues.

Chez les grecs, la notion de nature de nombre commence à apparaître. Le premier irrationnel à faire son entrée est $\sqrt{2}$ en tant que longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. En réalité, les grecs conçoivent un carré construit sur la diagonale du premier. L'aire du second est le double de celle du premier. Ils prouvent que le coté du second est dans un rapport au côté du premier que l'on ne peut pas exprimer.



Pythagore de Samos (-569 ; -475) selon Raphaël

Selon l'historien *Diogene Laërce* (IIIe siècle), ce sont les pythagoriciens qui, cinq siècles avant J.C., ont découvert l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire. Une valeur approchée de la solution ne convenant pas dans la formule de Pythagore, l'usage de la géométrie en arithmétique voit ses limites. Cette découverte doit rester secrète pour ne pas rompre le fondement même de la Fraternité : *"Tout est nombre"*. "Nombre" au sens d'un entier ou d'une fraction. Jusqu'à ce qu'un des membres de la Fraternité, *Hippase de Métaponte*, trahisse le secret.

L'historien et philosophe, *Proclus* (Ve siècle), déclara à ce sujet : *« On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues. »*

Euclide d'Alexandrie (-320? ; -260?) présente une des premières démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Dans le Livre X des « Eléments », il donne une classification des irrationnels connus qui sont tous des racines carrés d'entiers.

Plus tard, dans <u>*Les Sulbasutras*</u> (Règles des cordes), l'indien *Baudhayana* (vers 800) étudie la possibilité de construire un carré dont l'aire est le double d'un autre. Il sera conduit à évaluer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut s'effectuer aujourd'hui par l'absurde :
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors il existe deux entiers p et q tel que p/q soit irréductible et $\sqrt{2}$ = p/q.
Donc $2 = p^2/q^2$ soit $p^2 = 2q^2$.

- p^2 est ainsi un nombre pair donc p l'est également.
Il existe donc un entier r tel que $2r = p$.
La fraction $p/q = 2r/q$ étant irréductible, l'entier <u>q est impair</u>.

- or $p^2 = 2q^2$ soit $4r^2 = 2q^2$ soit encore $2r^2 = q^2$
Donc q^2 est pair et ainsi <u>q est pair</u>. (Lemme démontré page 13 du manuel et vu en classe)

Nous aboutissons à une contradiction donc l'hypothèse de départ est fausse.
Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel donc il est irrationnel.

Vers la fin du premier millénaire de notre aire, de nouveaux nombres irrationnels sont connus avec les progrès dans les calculs approchés obtenus par le développement des méthodes de résolution des équations (Voir l'histoire de l'algèbre et des équations).

Avec les savants arabes, les racines carrées obtiennent le statut de nombre. Pour *Abu Kamil* (850 ; 930) puis plus tard *Yahya Al Samaw'al* (1130 ; 1180), les nombres irrationnels sont un objet mathématique à part entière utilisé pour l'algèbre et l'arithmétique. Vers le début Xe siècle, un nombre rationnel est appelé « al-a`dad al-mantiqa » (nombre logique), un nombre irrationnel est appelé « al-a`dad asamma » (nombre sourd).

Au XVIe siècle, en Europe, le mathématicien belge Simon Stevin (1548 ; 1620) veut faire intégrer les nombres irrationnels parmi les nombres et s'oppose à l'utilisation d'*inexprimable* ou d'*irrationnel*.
Dans « Triparty en la science des nombres », *Nicolas Chuquet* (1445 ; 1488) note les radicaux avec un *"R"*. Puis le *"R"* devient *"r"* et avec *Christoff Rudolff* (1499 ; 1545), les racines carrées sont notées à l'aide du symbole √, les racines cubiques avec ∛ et les racines quatrièmes avec ∜.
Le symbole radical avec la barre supérieure sera utilisé en 1637 par René Descartes (1596 ; 1650) puis par *William Oughtred* (1574 ; 1660) dès 1647.

Connu depuis l'Antiquité en Chine, en Grèce et dans l'Inde du Ier siècle, les **fractions continues** contribueront au développement des nombres irrationnels et à la recherche de valeurs approchées.
Il est difficile de donner une définition de fraction continue. On les appelle aussi fractions à étages.
Pour comprendre, donnons le développement de $\sqrt{2}$ en fractions continues que propose *Rafael Bombelli* (1526 ; 1572) dans son « Algebra » :
(A noter que *Bombelli* ne l'écrivait pas de cette façon)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}}$$


201

L'ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DI RAFAEL BOMBELLO
BOLOGNESE.

Libro Secondo.

S I marauiglieranno forse alcuni, che contra l'antico uso de Scrittori Italiani, i quali fino à questo giorno hanno scritto di questa scientia dell'Arimetica, quando gli è occorso di trattare di quantità incognita: essi sempre l'hanno nominata sotto questa uoce di (Cosa) come voce commune à tutte le cose incognite, è d'io chiami hora queste quantità (Tanti) ma chi bene considerarà il fatto, conoscerà, che più se le conuiene questa uoce di (Tanto), che di (cosa), perche se diremo (Tanto) è uoce appropriata à quantità di numeri, ilche non si può dire di (cosa) essendo quella uoce uniuersalissima, e cõmune ad ogni sostantia cosi ignota come nota. In oltre io trouo, che Diofante Autter Greco cosi la noma, il ch'è di non pic O ciolo

L'Algebra de Bombelli

Plus tard Pierre de Fermat (1601 ; 1655), *Joseph Lagrange* (1736 ; 1813) ou encore *Adrien-Marie Legendre* (1752 ; 1833) apporteront des théories modernes. D'autres tels *Johann Lambert* (1728 ; 1777) s'attachent au développement du nombre π en fractions continues dans le but d'obtenir des valeurs approchées de plus en plus précises.

En 1737, dans *De fractionibus continuis*, Leonhard Euler (1707 ; 1783) démontre que toute solution irrationnelle positive d'une équation du second degré peut être représentée par une fraction continue.

Aux XVIIIe siècle, l'étude des fractions continues se généralise pour traiter de la nature des nombres (rationnels, irrationnels, algébriques, transcendants).
Un **nombre algébrique** est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Par exemple, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est algébrique car il est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$.
Un **nombre transcendant** ne se laisse dompter par aucune équation de ce type.
Les nombres π et e sont des irrationnels transcendants.

En 1844, *Joseph Liouville* (1809 ; 1882) explicite à l'aide des fractions continues plusieurs nombres transcendants. En 1873, *Georg Cantor* (1845 ; 1918) corrobore les travaux de *Liouville* et démontre l'existence des nombres transcendants. Puis en 1873, *Charles Hermite* (1822 ; 1901) démontre la transcendance de e et en 1882, *Ferdinand von Lindemann* (1852 ; 1939) démontre celle de π.

Richard Dedekind

Fin du XIXe siècle, *Richard Dedekind* (1831 ; 1916) réunit les rationnels et les irrationnels sous le nom de **nombres réels** (droite des réels) et définit les irrationnels sans l'aide des suites.

Quelques liens traitant du sujet :

- Denis Colin Page personnelle traitant de l'incommensurabilité
- Nombres - Curiosités, théorie et usages Un peu de théorie sur les nombres irrationnels
- Nombres - Curiosités, théorie et usages Les nombres transcendants
- Cité des sciences Cycle de 3 conférences filmées sur des nombres extraordinaires (pi, nombre d'or et racine de 2).
- **Bibliographie**