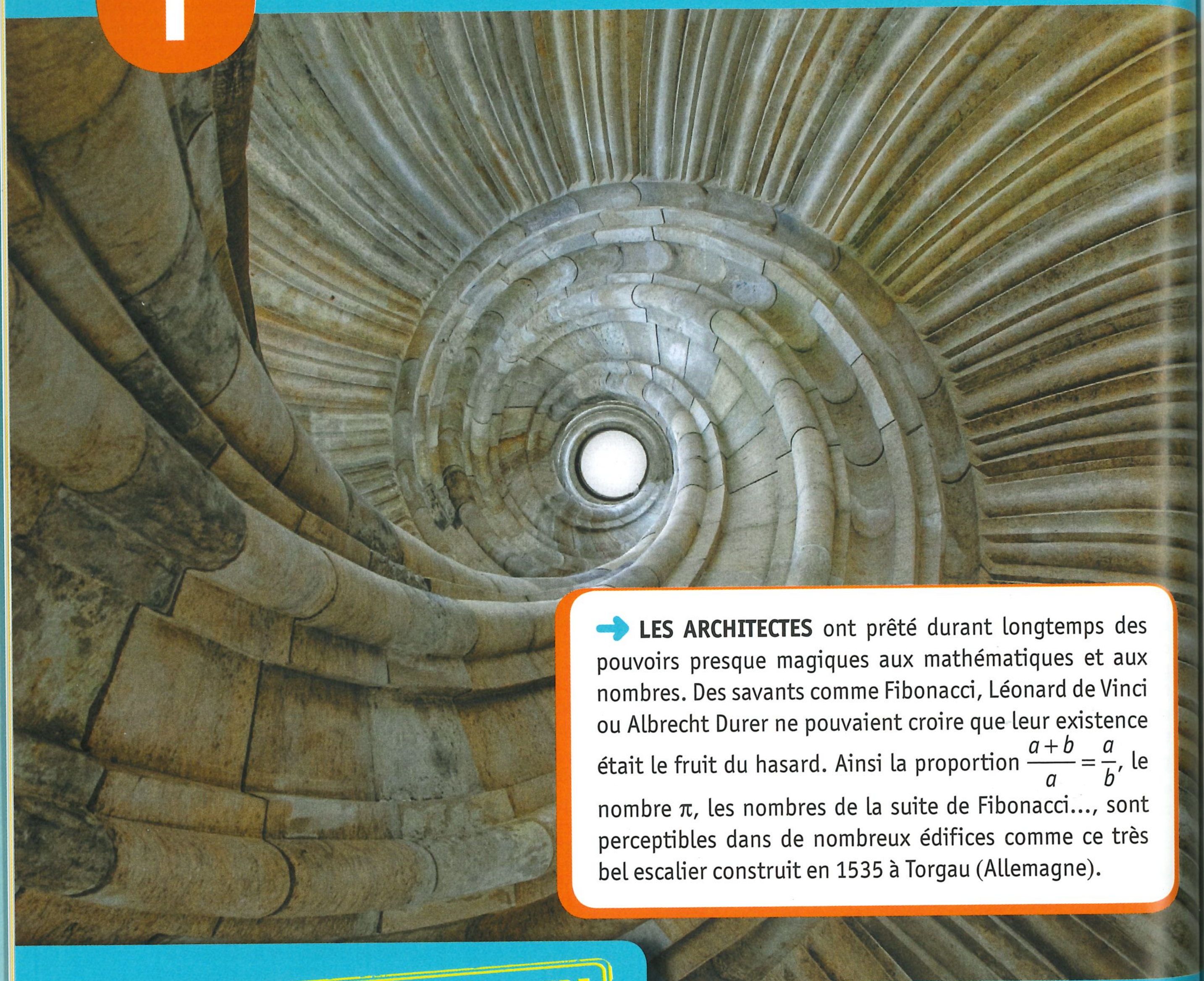
Chapitre 1

NOMBRES RÉELS



LES ARCHITECTES ont prêté durant longtemps des pouvoirs presque magiques aux mathématiques et aux nombres. Des savants comme Fibonacci, Léonard de Vinci ou Albrecht Durer ne pouvaient croire que leur existence était le fruit du hasard. Ainsi la proportion $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, le nombre π, les nombres de la suite de Fibonacci..., sont perceptibles dans de nombreux édifices comme ce très bel escalier construit en 1535 à Torgau (Allemagne).

LES INDISPENSABLES DU CHAPITRE

Ce que vous devez savoir faire à la fin de ce chapitre	Capacités	Exercices d'application
Connaître les ensembles de nombres	1	1 à 8
Manipuler les intervalles	2	9 à 20
Manipuler les valeurs absolues	3	21 à 37
Manipuler les puissances	4	38 à 42
Manipuler les racines carrées	5	43 à 51

À SAVOIR
pour comprendre le chapitre

Inclusion et appartenance à un ensemble

- Un élément x appartient à un ensemble E quand il figure dans cet ensemble.
On note $x \in E$.
- L'ensemble E est inclus dans l'ensemble F lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F. On note $E \subset F$.

Puissance d'un nombre entier non nul

Soit a un nombre entier naturel non nul et soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$:

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$.

Notation scientifique

On rappelle que la **notation scientifique** d'un nombre décimal s'écrit sous la forme :

$$\pm a \times 10^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leqslant a < 10$$

Les carrés parfaits

n	2	3	4	5	6	7
n^2	4	9	16	25	36	49

n	8	9	10	11	12	13
n^2	64	81	100	121	144	169

L'identité remarquable

Pour tout nombre a et b :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

QUESTIONS - TESTS

1 Vrai ou faux

Soit P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

a. $3 \in P$ **b.** $2{,}2 \in P$ **c.** $P \subset I$ **d.** $I \subset P$

2 QCM

1. $5^3 \times 5^5$ vaut :

a. 5^{15} **b.** 25^{15} **c.** 25^8 **d.** 5^8

2. $\frac{3^7}{3^8}$ vaut :

a. 3 **b.** 1/3 **c.** –3 **d.** –1/3

3. 36^5 vaut :

a. 6^7 **b.** 6^{10}

c. il n'y a pas d'autre écriture

4. $\frac{1}{3^{-2}}$ vaut :

a. –1/9 **b.** –1/6 **c.** 9 **d.** 6

3 QCM

Le double de 2^4 est :

❑ 4^4 ❑ 2^5 ❑ 4^8 ❑ 2^8

$3^5 \times 2^5 = \dots.$

❑ 6^5 ❑ 6^{10} ❑ 6^{25} ❑ 3^{10}

$2^2 + 2^2 = \dots.$

❑ 4^2 ❑ 4^4 ❑ 2^3 ❑ 3×2^2

4 Écrire en notation scientifique (en conservant les mêmes unités)

a. Masse de la Terre : $59\,736 \times 10^{18}$ kg

b. Surface de la Terre : 510 067 420 km^2

c. Masse du Soleil : $19\,891 \times 10^{26}$ kg

d. Surface du Soleil :
6 087 700 000 000 km^2

5 Écrire en notation scientifique (en conservant les mêmes unités)

a. Vitesse de la lumière :
299 792 458 m·s^{-1}

b. Charge de l'électron : -1602×10^{-22} C

c. Constante de Planck : $6\,626 \times 10^{-37}$ J·s

1. LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Théorème 1 (admis) | **Propriété de la droite numérique graduée**

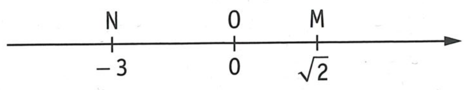
On peut associer à tout point M d'une droite graduée un nombre appelé abscisse du point M.

Définition 1

L'ensemble des abscisses des points de la droite numérique graduée est appelé l'**ensemble des nombres réels**. On le note $\mathbb{R}$.

▶ **Exemples**

L'abscisse du point O est 0, celle du point M est $\sqrt{2}$ et celle du point N est -3.



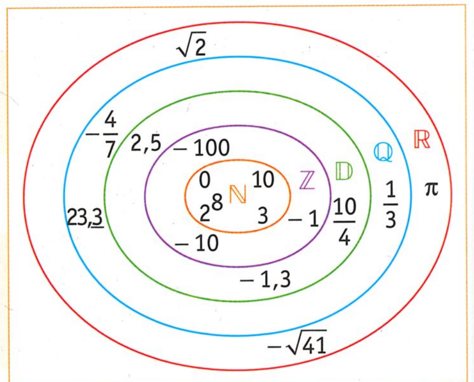
Définition 2

Ensembles de nombres	Notation	Éléments et exemples
Nombres **entiers naturels**	$\mathbb{N}$	$0 ; 1 ; 2 ; 3$
Nombres **entiers relatifs**	$\mathbb{Z}$	$-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3$
Nombres **décimaux**	$\mathbb{D}$	$\left\{\frac{a}{10^n} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$
Nombres **rationnels**	$\mathbb{Q}$	$\left\{\frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$
Nombres **réels**	$\mathbb{R}$	$\pi ; \sqrt{2} ; -\pi ; -\sqrt{2} ; 1 ; 2 ; \frac{1}{3}$

Propriété 1

Les ensembles de nombre vérifient les **inclusions** suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Propriété 2

Tout nombre rationnel se caractérise par une écriture décimale ayant un nombre fini de décimales ou comportant une période.

▶ **Exemples de nombres rationnels**

$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,\underbrace{3}33\ldots$ et $\frac{107}{22} = 4,8\underbrace{63}6363\ldots$

et on écrit $\frac{1}{3} = 0,\underline{3}$ $\frac{107}{22} = 4,8\underline{63}$.

On souligne les chiffres périodiques

▶ **Ensembles particuliers**

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1 ; 2 ; 3\ldots\}$, prononcé « $\mathbb{N}$ étoile » ou « $\mathbb{N}$ privé de zéro ».

$\mathbb{Z}^- = \{$ensemble des entiers relatifs négatifs$\}$.

$\mathbb{R}^+ = \{$ensemble des réels positifs$\}$ et $\mathbb{R}^{-*} = \{$ensemble des réels strictement négatifs$\}$.

Méthode — DÉMONTRER QU'UN NOMBRE N'EST PAS UN DÉCIMAL

■ **Démontrer que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.**

Solution

Voir le *cahier Logique* p. VII

Démonstration par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

Cette égalité peut s'écrire $10^n = 3a$.

Donc 10^n est divisible par 3, ce qui est impossible car la somme de ses chiffres vaut 1.

En conclusion : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal (car il possède une écriture décimale illimitée (0,333…)).

Méthode — DÉMONTRER QU'UN NOMBRE N'EST PAS UN RATIONNEL

■ **Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.**

Les différentes formes de type de démonstrations sont expliquées dans le *cahier Logique* p. VII.

Solution

1re étape : démontrons d'abord le lemme : « si a^2 est un nombre pair, alors a est un nombre pair ».

Démonstration par contraposition.

La contraposée du lemme est : « si a est un nombre impair, alors a^2 est un nombre impair ».

Si a est un nombre impair, il existe un entier naturel n tel que :

$$a = 2n + 1.$$

Donc $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ qui est un nombre impair car $2n^2 + 2n$ est un entier naturel.

2e étape : démontrons ensuite que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux (fraction irréductible) tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En élevant les deux membres au carré, nous obtenons :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ car deux réels égaux ont des carrés égaux.}$$

Soit $2b^2 = a^2$ (E). a^2 est donc un nombre pair.

D'après le lemme ci-dessus, a l'est aussi. Par conséquent $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{Z}$.

Ainsi l'équation (E) s'écrit :

$$2b^2 = 4a'^2, \text{ soit } b^2 = 2a'^2,\ b^2 \text{ est donc un nombre pair.}$$

D'après le lemme, b est aussi un nombre pair.

Finalement a et b sont tous les deux des nombres pairs, ce qui est impossible car ils sont premiers entre eux.

En conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, on dit qu'il est **irrationnel** (tout comme $\sqrt{3}$ ou π).

2. INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

A Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

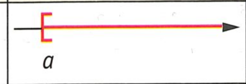
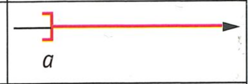
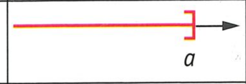
Définitions 3

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Intervalles bornés

Intervalle	Inégalités vérifiées par le réel x	Représentation sur la droite graduée
$x \in [a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$x \in [a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$x \in]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
$x \in]a;b[$	$a < x < b$	

Intervalles non bornés

Intervalle	Inégalités vérifiées par le réel x	Représentation sur la droite graduée
$x \in [a;+\infty[$	$x \geqslant a$	
$x \in]a;+\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty;a]$	$x \leqslant a$	
$x \in]-\infty;a[$	$x < a$	

▶ Remarque

Si a et b sont les bornes d'un intervalle, a est appelée « borne inférieure » et b « borne supérieure ».

Définitions 4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- On appelle intersection de I et de J l'ensemble, noté $I \cap J$, des réels x qui appartiennent à la fois à I **et** à J. L'ensemble $I \cap J$ se lit « I inter J ».
- On appelle réunion de I et de J l'ensemble, noté $I \cup J$, des réels x appartenant à I **ou** à J. L'ensemble $I \cup J$ se lit « I union J ».

B Application à la résolution d'inéquations

On considère l'expression algébrique $ax+b$ où a et b sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

$ax+b=0$ équivaut à $ax=-b$, donc $ax+b=0$ équivaut à $x=\frac{-b}{a}$ car $a \neq 0$.

$ax+b>0$ équivaut à $ax>-b$

$$ax>-b \text{ équivaut à } \begin{cases} x>-\frac{b}{a} & \text{si } a>0 \\ x<-\frac{b}{a} & \text{si } a<0 \end{cases}$$

$ax+b<0$ équivaut à $ax<-b$

$$ax<-b \text{ équivaut à } \begin{cases} x<-\frac{b}{a} & \text{si } a>0 \\ x>-\frac{b}{a} & \text{si } a<0 \end{cases}$$

Propriété 3

Quels que soient les réels a et b avec $a \neq 0$, le signe de $ax+b$ est :

- Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Méthode — REPRÉSENTER UN INTERVALLE SUR LA DROITE NUMÉRIQUE GRADUÉE

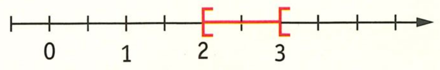
■ **Représenter l'intervalle [2 ; 3[sur la droite numérique graduée.**

➜ Comment s'y prendre ?

L'intervalle [2 ; 3[contient tous les réels compris entre 2 inclus et 3 exclu. L'intervalle est représenté par les points de la droite graduée compris entre le point A d'abscisse 2 et le point B d'abscisse 3 ; la borne inférieure fait partie de l'intervalle et la borne supérieure n'en fait pas partie. On fait apparaître les crochets sur le dessin.

Solution

L'intervalle [2 ; 3[contient tous les réels compris entre 2 inclus et 3 exclu (intervalle semi-fermé à gauche).



Méthode — DÉTERMINER DES INTERSECTIONS ET DES RÉUNIONS D'INTERVALLES

■ **Dans chaque cas, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles proposés :**

a. $[2;10]$ et $[7;25]$ **b.** $[-4;+\infty[$ et $]-9;7[$

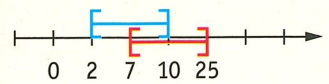
➜ Que doit-on faire ?

L'intersection de deux intervalles est constituée des réels qu'ils ont en commun et la réunion de deux intervalles est déterminée par l'ensemble des réels appartenant à au moins l'un des deux.

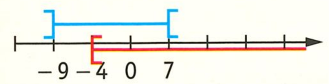
➜ Comment s'y prendre ?

Représenter chaque intervalle sur une droite graduée avec une couleur différente. La superposition des deux couleurs indique l'intersection. La présence d'au moins une couleur indique la réunion.

Solution

a. 

- $[2;10] \cap [7;25] = [7;10]$
- $[2;10] \cup [7;25] = [2;25]$

b. 

- $[-4;+\infty[\cap]-9;7[= [-4;7[$
- $[-4;+\infty[\cup]-9;7[=]-9;+\infty[$

Méthode — RÉSOUDRE UNE INÉQUATION

■ **Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (J) : $(-x+5)(2x+8) \leqslant 0$.**

➜ Comment s'y prendre ?

On détermine le signe de chaque facteur et on utilise la règle de signe pour un produit.

Solution

$-x+5=0$ équivaut à $x=5$ et

$2x+8=0$ équivaut à : $2x=-8$ soit $x=-4$.

La solution de l'inéquation J est :

$S=]-\infty;-4] \cup [5;+\infty[$.

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+5)(2x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. ENCADREMENT D'UN NOMBRE RÉEL PAR DEUX NOMBRES

Définition 5

Soient a, b, x trois nombres réels. On dit que a et b **encadrent** le réel x si $a < x < b$. a est la **borne inférieure** de l'encadrement, b est la **borne supérieure** et $b - a$ est l'**amplitude** de l'encadrement.

Théorème 2 (admis)

Tout nombre réel peut être encadré (au sens strict ou au sens large) par deux nombres décimaux avec une amplitude choisie.

▶ Exemple

$1,2 < \sqrt{2} < 2$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ de borne inférieure 1,2 et de borne supérieure 2 ; l'amplitude de cet encadrement est 0,8.

- d'amplitude 10^{-1} (soit au 10^{e} près) est : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
- d'amplitude 10^{-3} (soit au 1000^{e} près) est : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Valeur approchée par défaut — Valeur approchée par excès

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Valeur exacte

Propriété 4 (admise)

Quels que soient les réels a, b, c et d :
- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$;
- si a, b, c et d sont **strictement positifs**, si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$.

4. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

Définition 6

On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel a, le nombre réel noté $|a|$, défini par :

$$\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0, & |a| = a \\ \text{Si } a < 0, & |a| = -a \end{cases}$$

▶ Exemples

$|7| = 7$ (car $7 \geqslant 0$) ; $|-7| = -(-7) = 7$ car $(-7 < 0)$; $|0| = 0$; $|-4,2| = 4,2$.

Propriété 5 (admise)

- Pour tout nombre réel a, $|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$ et $|a|^2 = a^2$.
- Pour tous nombres réels a et b, $|a - b| = |b - a|$, $|ab| = |a| \cdot |b|$ et $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Définition 7

Soient a et b deux nombres réels.
La distance entre les réels a et b est le nombre réel positif noté $d(a\,;b) = |a - b|$.

▶ Exemple

La distance entre 3,5 et 10 est $d(3,5\,;10) = |3,5 - 10| = |-6,5| = 6,5$.

Quel que soit le nombre réel a, $d(a\,;0) = |a|$

▶ Remarque

Pour tous nombres réels a et b, on a $d(a\,;b) \geqslant 0$, $d(a\,;b) = d(b\,;a)$ et $d(a\,;a) = 0$.

Méthode — TROUVER DES VALEURS APPROCHÉES D'UN NOMBRE RÉEL

a. **Le nombre réel $\sqrt{2}$ appartient-il aux intervalles $]1,41\,;1,42[$ et $]1,40\,;1,41[$?**
b. **Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, trouver un encadrement à 10^{-3} près de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et en déduire un encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ à 10^{-1} près.**

➜ Comment s'y prendre ?

a. Lire au moins trois décimales de $\sqrt{2}$ sur sa calculatrice. À partir de la 3^{e} décimale de $\sqrt{2}$ voir si le réel est compris ou non dans l'intervalle.
b. Pour trouver deux réels a et b tels que $a < \sqrt{2} + \sqrt{3} < b$, on additionne membre à membre les deux encadrements de même sens : si $a < x < b$ et $c < y < d$, alors $a + c < x + y < b + d$.

Solution

a. $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ Ainsi on peut écrire que :

$$\sqrt{2} \in \,]1,41\,;1,42[\quad \text{mais} \quad \sqrt{2} \notin \,]1,40\,;1,41[.$$

b. On additionne membre à membre : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$

ce qui donne $3,146 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,148$.
L'amplitude de l'encadrement obtenu (0,002) est la somme des amplitudes initiales (0,001 + 0,001).
Un encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ à 10^{-1} près est de $3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,2$.

Méthode — RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS ET DES INÉQUATIONS COMPORTANT UNE VALEUR ABSOLUE

■ **Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) $|x - 3| = 5$, puis l'inéquation (I) $|x - 3| \leqslant 5$.**

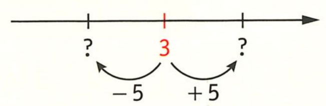
➜ Comment s'y prendre ?

Représenter le point d'abscisse 3 sur la droite graduée et raisonner en termes de distance entre le réel x et le réel 3.
Quel que soit le nombre réel positif k, l'inéquation $|x - a| \leqslant r$ est l'ensemble des réels x situés à une distance inférieure ou égale à r de a, soit :

$$-r \leqslant x - a \leqslant r \quad \text{soit} \quad a - r \leqslant x \leqslant a + r$$

ou encore l'ensemble des réels de l'intervalle $[a - r\,; a + r]$, intervalle de milieu a et d'amplitude $2r$.

Solution



- L'équation (E) $|x - 3| = 5$ s'interprète comme « la distance entre x et le réel 3 vaut 5 »
Ainsi $|x - 3| = d(x\,;3) = 5$.
Il y a donc une solution à droite qui vaut $3 + 5 = 8$ et une solution à gauche qui vaut $3 - 5 = -2$
Ainsi $S = \{-2\,;8\}$.
- L'inéquation (I) $|x - 3| \leqslant 5$ revient à résoudre $d(x\,;3) \leqslant 5$. Ainsi $S = [-2\,;8]$.

CAPACITÉS

1 Connaître les ensembles de nombres

1. Parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, quel est le plus petit ensemble de nombres dans lequel se trouvent les nombres : **a.** $\frac{27}{10}$? **b.** $-\frac{1}{3}$?

2. Démontrer que $\sqrt{2}-1$ n'est pas un rationnel.

Solution

1.a. $\frac{27}{10}$ s'écrit de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{27}{10} \in \mathbb{D}$.
D'autre part $\frac{27}{10}$ n'est pas entier donc $\frac{27}{10} \notin \mathbb{Z}$.
Le plus petit ensemble auquel appartient $\frac{27}{10}$ est $\mathbb{D}$.

b. $-\frac{1}{3}$ est un rationnel, il appartient donc à $\mathbb{Q}$. On a montré dans le cours que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, donc son opposé non plus.
Le plus petit ensemble auquel appartient $-\frac{1}{3}$ est $\mathbb{Q}$.

2. Démontrons que $\sqrt{2}-1$ n'est pas un rationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2}-1 \notin \mathbb{Q}$, en raisonnant par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{2}-1 \in \mathbb{Q}$.
Dans ce cas, il existe deux entiers relatifs a et b avec $b>0$ tels que $\sqrt{2}-1=\frac{a}{b}$.
Donc $\sqrt{2}=1+\frac{a}{b}$ soit $\sqrt{2}=\frac{b+a}{b}$.
$b+a$ et b étant des entiers relatifs, cela entraînerait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux (vu en cours).
On obtient donc une absurdité, l'hypothèse $\sqrt{2}-1 \in \mathbb{Q}$ est donc fausse, son contraire est vrai soit : $\sqrt{2}-1 \notin \mathbb{Q}$.
Le plus petit ensemble auquel appartient $\sqrt{2}-1$ est $\mathbb{R}$.

Méthode

→ **Pour trouver le plus petit ensemble de nombres,** on doit toujours avoir en tête la série d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

→ **On justifie** que le plus petit ensemble contenant $\frac{27}{10}$ est $\mathbb{D}$ en montrant que :
$\frac{27}{10} \in \mathbb{D}$ et $\frac{27}{10} \notin \mathbb{Q}$.

→ **On a vu dans le cours que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.**

→ **Pour bien comprendre les raisonnements par l'absurde,** on peut se reporter au *cahier Logique* p. VII, en début de manuel.

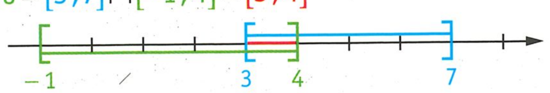
→ **On a vu dans le cours que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.**

2 Manipuler les intervalles

Soient, dans $\mathbb{R}$, les intervalles $I=[3;7]$, $J=[-1;4]$.
Déterminer et représenter sur la droite numérique graduée :
a. $I \cap J$ **b.** $I \cup J$

Solution

a. $I \cap J=[3;7] \cap [-1;4]=[3;4]$



b. $I \cup J=[3;7] \cup [-1;4]=[-1;7]$

Méthode

→ **On trace chaque intervalle sur la droite numérique graduée** et on identifie, en rouge sur le schéma, l'intersection (la partie commune) des deux intervalles.

→ On identifie la réunion des deux intervalles I et J.

CAPACITÉS

3 Manipuler les valeurs absolues

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes :

a. $|-3x|=7$ **b.** $\left|\frac{5}{2}x\right|<-15$ **c.** $|x-4|=|x+6|$

d. $|x-5| \leqslant 6$ **e.** $|x+10| \geqslant 3$

Solution

a. $|-3x|=7$ est égal, par définition à :

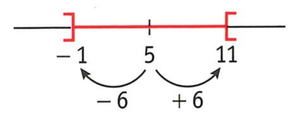
$$\begin{cases} \text{soit } -3x=7 & \text{donc } x=-\frac{7}{3} \\ \text{soit } -3x=-7 & \text{donc } x=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Donc $S=\left\{-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right\}$.

b. $\left|\frac{5}{2}x\right|<-15$ donc $S=\varnothing$

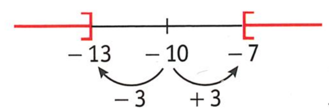
c. $|x-4|=|x+6|$
$d(x;4)=|x-4|$ et $d(x;-6)=|x+6|$
$d(x;4)=d(x;-6)$
Donc $x=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$
$S=\{-1\}$

d. $|x-5|<6$ équivaut à $d(x;5)<6$



$S=]-1;11[$

e. $|x+10| \geqslant 3$ équivaut à $d(x;-10) \geqslant 3$



$S=]-\infty;-13] \cup [-7;+\infty[$

Méthode

→ **Résoudre une équation ou une inéquation c'est déterminer l'ensemble des réels x vérifiant l'égalité ou l'inégalité.**
Si la valeur absolue d'un réel vaut 7, alors ce réel vaut 7 ou −7.

→ **Une valeur absolue est toujours positive.**

→ **On cherche l'ensemble des points M d'abscisse x situés à égale distance de A(4) et de B(−6) sur la droite graduée :** seul le milieu du segment [AB] vérifie cette condition.

→ **Soit r un réel positif et a un réel**
$|x-a|<r$ équivaut à $d(x;a)<r$.
$d(x;a)<r$ équivaut à $x \in]a-r;a+r[$.

→ **Soit r un réel positif et a un réel**
$|x-a| \geqslant r$ équivaut à $d(x;a) \geqslant r$.
équivaut à $x \in]-\infty;a-r] \cup [a+r;+\infty[$.

CAPACITÉS

4 Manipuler les puissances

Simplifier les nombres suivants où a et b sont deux réels non nuls :

$A=\left(a^{-5}\right)^3$ $\quad B=\left(a^3\right)^3\times a^{-6}$ $\quad C=b^{-5}a^4(ab)^3$

$D=\left(\left(a^2\right)^3\right)^4\times a^{-24}$ $\quad E=\dfrac{(ab)^7}{\left(a^2b\right)^3\times b^4}$ $\quad F=\dfrac{\left(a^{-5}\right)^3}{\left(\left(a^2\right)^3\right)^4}$

Solution

$A=\left(a^{-5}\right)^3=a^{-5\times3}=a^{-15}$

$B=\left(a^3\right)^3\times a^{-6}=a^{3\times3}\times a^{-6}=a^9\times a^{-6}=a^{9-6}=a^3$

$C=b^{-5}a^4(ab)^3=b^{-5}a^4a^3b^3=a^{4+3}b^{-5+3}=a^7b^{-2}$

$D=\left(\left(a^2\right)^3\right)^4\times a^{-24}=a^{2\times3\times4}\times a^{-24}$
$=a^{24}\times a^{-24}=a^0=1$

$E=\dfrac{(ab)^7}{\left(a^2b\right)^3\times b^4}=\dfrac{a^7b^7}{a^6b^3\times b^4}=a^{7-6}b^{7-7}=a$

$F=\dfrac{\left(a^{-5}\right)^{-3}}{\left(\left(a^2\right)^3\right)^4}=\dfrac{a^{15}}{a^{24}}=a^{15}\times a^{-24}=a^{-9}$

Méthode

→ **On utilise :** $\left(a^n\right)^p=a^{n\times p}$.

→ **On utilise** $a^n\times a^p=a^{n+p}$.

→ **On note que** $(ab)^3=a^3b^3$.

→ **On peut aussi écrire** $a^7b^{-2}=\dfrac{a^7}{b^2}$.

→ **On utilise en plus la formule** $\dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ valable aussi pour b.

→ **On utilise les simplifications** faites précédemment pour les nombres A et D.

5 Manipuler les racines carrées

Simplifier les nombres : M $=\sqrt{150}$ $\quad N=\sqrt{8}\times\sqrt{50}$ $\quad Q=\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}$ $\quad P=\sqrt{\dfrac{35}{3}}\times\sqrt{\dfrac{21}{5}}$

Solution

$M=\sqrt{150}=\sqrt{6\times25}=\sqrt{6}\times\sqrt{25}=\sqrt{6}\times5=5\sqrt{6}$

$N=\sqrt{8}\times\sqrt{50}=\sqrt{2\times4}\times\sqrt{2\times25}$
$=2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}$
$=10\times\left(\sqrt{2}\right)^2=10\times2=20$

$Q=\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}=\left|1-\sqrt{7}\right|$ or $1-\sqrt{7}<0$ donc
$\left|1-\sqrt{7}\right|=\sqrt{7}-1$ ainsi :
$Q=\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{7}-1$

$P=\sqrt{\dfrac{35}{3}}\times\sqrt{\dfrac{21}{5}}=\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7\times5}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3\times7}}{\sqrt{5}}$
$=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$

Méthode

→ **On cherche un diviseur de 150** parmi la liste des carrés des entiers : 4, 9, 16, 25, 36, etc. Ici 25 convient.
Puis on utilise la formule $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ car a et b sont positifs.

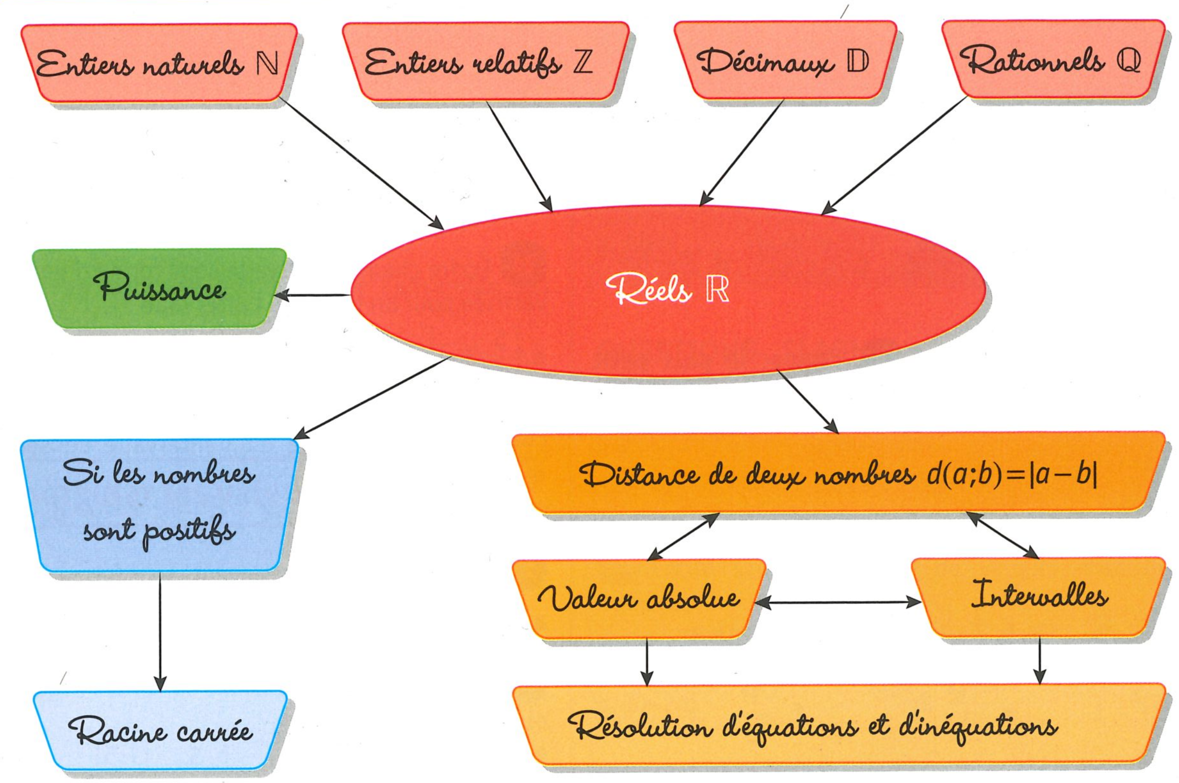
→ **On décompose** N de la même manière, puis on utilise la formule $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ car $a>0$.

→ **On utilise** $\sqrt{a^2}=|a|$.

→ **On utilise la formule** $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ car a et b sont positifs et b non nul puis on décompose.

Le coin MÉMO

Des idées à retenir



Des automatismes à avoir

- Connaître les carrés parfaits de 2 à 15.
- Savoir que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
- **Intervalles de** $\mathbb{R}$ **:**
  - $[a\,;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a\leqslant x\leqslant b$.
  - $]a\,;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a<x<b$.
  - $[a\,;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $a\leqslant x$.
  - $]-\infty\,;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $x\leqslant b$.
- **Encadrement :** a et b encadrent x signifie que $a\leqslant x\leqslant b$.
- Pour calculer une somme de puissance on la décompose pour faire apparaître une puissance en commun : $2^4+2^3=2\times2^3+2^3=3\times2^3$.
- Pour connaître le signe d'un produit AB ou d'un quotient $\dfrac{A}{B}$, il suffit de connaître le signe de A et celui de B.

Des erreurs à éviter

→ Une valeur absolue est toujours positive : $|3x-5|=-2$ n'a aucune solution.

→ Pour tous réels strictement positifs a et b : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

→ $|a+b|\neq d(a,b)$ mais $|a+b|=d(a,-b)=d(-a,b)$

Connaître les ensembles de nombres

→ voir Capacité 1 p. 18

À L'ORAL

1 Dire si les affirmations suivantes sont vraies.
a. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ **b.** $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ **c.** $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ **d.** $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}$

2 **a.** $26 \in \mathbb{Z}^-$ **b.** $0 \in \mathbb{N}^*$ **c.** $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ **d.** $-\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$

3 **a.** $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{N}$ **b.** $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Z}$ **c.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}^+$ **d.** $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}^+$

Pour les exercices 4 et 5, donner le plus petit ensemble auquel appartiennent les nombres proposés.

QUESTIONS FLASH

4 **a.** -2 **b.** $\sqrt{6}$ **c.** $\frac{-4\pi}{8\pi}$ **d.** 5 **e.** $\frac{1}{4}$

5 **a.** $2\sqrt{2}$ **b.** $\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)$ **c.** $\frac{3}{2}(11-3)$
d. $(\sqrt{7})^2-1$ **e.** $-\frac{3^8}{3}$ **f.** $\frac{-3^8}{-8}$

6 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
a. $\left\{-3;0;\frac{1}{3};6\right\} \subset \mathbb{Z}$ **b.** $\left\{-3;0;\frac{12}{3};6\right\} \subset \mathbb{Z}$
c. $\left\{-\frac{6}{2};0;\sqrt{9}\right\} \subset \mathbb{N}$ **d.** $\left\{-3;0;\frac{1}{5};\sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{Q}$

7 VRAI OU FAUX ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Si la réponse est fausse, donner un contre-exemple.
Si la réponse est vraie, justifier la réponse.
a. Un nombre rationnel est toujours un nombre réel.
b. Un nombre rationnel est toujours un nombre décimal.
c. L'inverse d'un nombre décimal est toujours un nombre décimal.
d. Un nombre entier est toujours un nombre décimal.
e. Un nombre entier est toujours un nombre rationnel.

8 Pour chacun des nombres A à D, dire si c'est un entier naturel, relatif ou si ce n'est pas un entier :
$A=-\sqrt{121}$; $B=(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$; $C=\frac{268}{400}$; $D=\frac{5}{\frac{3}{3}}$.

Manipuler les intervalles

→ voir Capacité 2 p. 18

9 Représenter chaque intervalle sur la droite numérique graduée.
a. $I=[-1\,;2]$ **b.** $J=]-2\,;0[$ **c.** $K=[1\,;5[$

10 Écrire chaque intervalle sous forme d'un encadrement d'un réel x.
a. $[-5\,;1]$ **b.** $]-1\,;2[$ **c.** $]-10\,;-9[$ **d.** $[-0{,}5\,;7{,}5[$

11 Écrire chaque intervalle sous forme d'une inégalité vérifiée pour un réel x de l'intervalle :
a. $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$ **b.** $]-\infty\,;-4]$ **c.** $]-\infty\,;0[$ **d.** $[-1\,;+\infty[$

12 Écrire sous forme d'un intervalle l'ensemble des réels x vérifiant :
a. $1 \leqslant x \leqslant 7$ **b.** $0<x<2$ **c.** $-1<x \leqslant 4$ **d.** $7 \leqslant x<8$

13 Écrire les ensembles suivants sous forme d'intervalle.
a. $x>4$ **b.** $x \leqslant -1$ **c.** $x \geqslant \frac{7}{2}$ **d.** $x<\sqrt{3}$

14 Compléter les expressions suivantes avec le signe $\in$ ou $\notin$:
a. $-3\,....\,]-3;1]$ **b.** $5\,....\,[1;5]$
c. $-\pi\,....\,[-3;-2]$ **d.** $-\frac{5}{6}\,....\,[-2;0]$

15 Écrire les ensembles suivants sous forme d'intersection d'intervalles puis donner le résultat.
a. $x<2$ et $-7<x<7$. **b.** $-\frac{7}{2}<x \leqslant 4$ et $x \leqslant -1$.

16 Soient les intervalles $I=[-2\,;4]$, $J=[-5\,;2[$ et $K=[-3\,;5[$.
Déterminer et représenter sur la droite numérique graduée :
$L=I \cap J$ $M=I \cup J$ $N=K \cap I$ $P=I \cap J \cap K$

17 VRAI OU FAUX ?
a. $[-1\,;3] \subset [-3\,;7]$?
b. $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$?
c. $]3\,;4[\, \cup\,]4\,;10[\, = \,]3\,;10[$?

18 **1.** Déterminer :
a. $]-11\,;8] \cap [-11\,;1{,}5]$
b. $[-7\,;-3[\cap]-2\,;-1]$
2. Déterminer :
a. $[15\,;37[\cup]-1\,;17[$
b. $]-5\,;2] \cup [3\,;7]$

19 Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés I et J sur la droite graduée, puis exprimer sous forme d'intervalles $I \cap J$ et $I \cup J$.

	Intervalle I	Intervalle J
Cas 1	$[-4\,;2]$	$[-1\,;6]$
Cas 2	$]-\infty\,;3]$	$[-2\,;+\infty[$
Cas 3	$]-\infty\,;7]$	$]-\infty\,;4]$
Cas 4	$]-\infty\,;-1]$	$[-1\,;+\infty[$
Cas 5	$[3\,;+\infty[$	$[-5\,;+\infty[$

20 Écrire, en utilisant les intervalles l'ensemble des réels x vérifiant
a. $x \neq 4$ **b.** $x \notin [-2;4]$ **c.** $x \neq -5$ et $x \neq 3$

Manipuler les valeurs absolues

→ voir Capacité 3 p. 19

À L'ORAL

21 Calculer
a. $|-7|$ **b.** $|7|$ **c.** $|4{,}2|$ **d.** $|-\pi|$

22 Calculer
a. $|-0{,}01|$ **b.** $|\pi-3|$ **c.** $|\sqrt{2}-10|$

QUESTIONS FLASH

23 Calculer
a. $|-13-8|$ **b.** $|-7+1|$ **c.** $|12-4|$ **d.** $-|-4-5|$

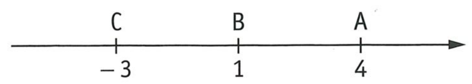
24 Calculer
a. $|1-\sqrt{2}|$ **b.** $|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$ **c.** $|\pi-4|$ **d.** $|\pi|-|-\pi|$

25 Calculer
a. $|-5| \times |-6|$ **b.** $|-5+3|+|-7+4|$ **c.** $|11-19|-|-14+1|$

Pour les exercices 26 à 28, on utilise le rappel sur la distance de deux nombres x et y :

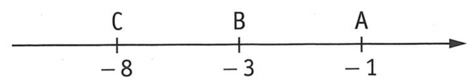
RAPPEL
$d(x\,;y)=|x-y|$ est la distance entre x et y.

26 On donne un axe gradué, sur lequel on a placé les points A, B et C. Compléter les pointillés.



a. AB = ... **b.** AC = ... **c.** BC = ... **d.** CC = ...

27 On donne un axe gradué, sur lequel on a placé les points A, B et C. Compléter les pointillés.



a. AB = ... **b.** AC = ... **c.** BC = ...

QUESTIONS FLASH

28 Donner la valeur des distances suivantes :
a. $d(3\,;4)$ **b.** $d(-3\,;4)$ **c.** $d(0\,;-5)$
d. $d(-7\,;-6)$ **e.** $d(-5\,;-5)$ **f.** $d(-5\,;2)$

29 Écrire sans les barres de valeurs absolues les nombres :
a. $\left|(1-\sqrt{2})^2\right|$ **b.** $|2\sqrt{2}-\sqrt{3}|$
c. $|6-2\pi|$ **d.** $\frac{|-2|}{|-5+1|}$

Pour les exercices 30 à 32, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations proposées :

30 **a.** $|x|=5$ **b.** $|-x|=19$
c. $|x|=-7$ **d.** $|x|=4{,}2$

31 **a.** $|x|=\pi-1$ **b.** $|-x|=\sqrt{2}-\sqrt{3}$
c. $|x-7|=0$ **d.** $|x+5{,}4|=0$

32 **a.** $|x+1|=12$ **b.** $|x-3|=8$
c. $|x-5|=8$ **d.** $\left|x-\frac{7}{2}\right|=2$

33 VRAI OU FAUX ?

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.
a. Quels que soient les réels a et b, $|a+b|=|a|+|b|$.
b. Si $|x|=|-x|$ alors $x=0$.
c. $|a-b|=|b-a|$.
d. $4|x+y|=|4x+4y|$.

QCM Une seule réponse exacte

34 **1.** $|x| \geqslant 4{,}22$ peut s'écrire sans valeur absolue sous la forme :
a. $-4{,}22 \leqslant x \leqslant 4{,}22$ **b.** $x \geqslant 4{,}22$
c. $x \geqslant 4{,}22$ ou $x \leqslant -4{,}22$

2. $|x| \geqslant -\frac{1}{2}$ peut s'écrire sans valeur absolue sous la forme :
a. $x \leqslant \frac{1}{2}$ et $x \geqslant -\frac{1}{2}$ **b.** $x \in \mathbb{R}$ **c.** $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

Pour les exercices 35 à 37, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations proposées.

35 **a.** $|x-1| \geqslant 2$ **b.** $|x+3| \geqslant 4$

36 **a.** $|x-2| \leqslant 5$ **b.** $|x-5| \leqslant 1$
c. $|x+1{,}5|+2{,}5<6$ **d.** $|x-\sqrt{3}|<\sqrt{3}$

37 **a.** $|x-4| \leqslant 7$ **b.** $\left|x-\frac{1}{2}\right|>3$
c. $|x-2| \geqslant \sqrt{3}$ **d.** $|x+\pi|<5$

Manipuler les puissances

→ voir Capacité 4 p. 20

38 Soient $A=-5\times10^3$ et $B=5\times10^{-3}$
a. Calculer $A+B$ et $A-B$.
b. Calculer $A\times B$ et $\frac{A}{B}$.

39 Simplifier l'écriture de chaque nombre :
$M=(a^7)^{-2}$ $N=(a^2)^7\times a^{-13}$
$Q=(ab)^2b^{-1}a^{-2}$ $P=\left((a^{-1})^{-3}\right)^2\times a^{-6}$

40 Simplifier l'écriture de chaque nombre :
$R=(-a)^5\times(-b)^6$ $S=\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\times a^5$
$T=(ab)^{-6}\times(b^3)^4$ $U=a^{-7}\times(-b)^8\times a^9\times(-b)^{-10}$

41 Sans calculatrice et en détaillant les calculs, simplifier l'écriture de chaque nombre :
$A=2^{17}\times(0{,}5)^{16}$ $B=\left(\frac{7}{3}\right)^9\times\left(\frac{3}{7}\right)^8$
$C=(36)^{-5}\times6^5\times6^6$ $D=\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\times(1{,}5)^{12}$

42 Simplifier l'écriture de chaque nombre :
$E=\left(\frac{2^4\times3^5\times5^3}{6}\right)^3$ $F=\frac{2^7\times10^{-5}\times3^{10}}{10^{-9}\times2^5\times3^7}$
$G=\frac{(2ab)^3\times b^{-5}}{b^{-8}\times8a^2}$ $H=\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-3}\times a^6$

Manipuler les racines carrées

→ voir Capacité 4 p. 20

QUESTIONS FLASH

43 Calculer mentalement :
$A=\sqrt{25}$ $B=\sqrt{99}$ $C=-\sqrt{16}$ $D=\sqrt{64}$
$E=-\sqrt{36}$ $F=\sqrt{49}$ $G=-\sqrt{9}$ $H=\sqrt{144}$

44 Calculer mentalement :
$A=4\sqrt{25}$ $B=5-\sqrt{25}$ $C=10-\sqrt{81}$
$D=\sqrt{6}+12$ $E=63-\sqrt{36}$ $F=\sqrt{81}-\sqrt{49}$

Pour les exercices 45 et 48, écrire les nombres proposés sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier naturel et b le plus petit entier positif possible.

45 $E=\sqrt{8}$ $F=\sqrt{27}$ $G=\sqrt{50}$ $H=\sqrt{1\,000}$

46 $J=\sqrt{98}$ $K=\sqrt{48}$ $L=\sqrt{108}$ $M=\sqrt{121}$

47 **a.** Écrire A sous la forme $a\sqrt{7}$ où a est un entier naturel :
$A=4\sqrt{63}-2\sqrt{175}+3\sqrt{112}-7\sqrt{28}$
b. Écrire B sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier naturel :
$B=-2\sqrt{147}+3\sqrt{75}$

48 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels et b est le plus petit entier naturel possible :
$C=7\sqrt{24}+2\sqrt{150}-3\sqrt{96}$
$D=-2\sqrt{52}+5\sqrt{26}\sqrt{2}-3\sqrt{208}$.

QCM Une seule réponse exacte

49 Le nombre $E=3\sqrt{45}+\sqrt{180}$:
a. est égal à $12\sqrt{5}$ **b.** est égal à $6\sqrt{45}$
c. est égal à $15\sqrt{5}$ **d.** ne se simplifie pas

50 Simplifier :
$F=\sqrt{32}\times\sqrt{50}$ $G=\sqrt{\sqrt{256}}$ $H=\sqrt{13}\times\sqrt{0}$

51 Monter que $\sqrt{1\,183}-2\sqrt{63}-\sqrt{343}=0$.

→ CORRIGÉS p. 350

QUESTIONS SUR LE COURS Vérifier ses connaissances.

52 Citer un nombre appartenant :
a. à $\mathbb{Q}$, mais pas à $\mathbb{D}$.
b. à $\mathbb{D}$, mais pas à $\mathbb{Z}$.

53 **a.** Quelle est l'amplitude de l'intervalle $[-5;1]$?
b. Quelle est l'amplitude de l'encadrement $-7<x<9$?
c. Dans l'encadrement $-7<x<9$, comment nomme-t-on le nombre 9 ?
d. Quelle que soit la valeur de a, que vaut $\sqrt{a^2}$?
e. La fraction $\frac{39}{52}$ est-elle irréductible ? Pourquoi ?

54 Écrire l'inégalité $|x-a|<r$ où r est un nombre strictement positif, en utilisant :
a. la notion de distance ;
b. un encadrement ;
c. un intervalle.

55 Écrire l'inégalité $|x-a| \geqslant r$ où r est un nombre strictement positif en utilisant :
a. la notion de distance ;
b. un encadrement ;
c. un intervalle.

VRAI OU FAUX ? Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse et justifier sa réponse.

56 **a.** $\left\{-3;0;\frac{1}{3};6\right\}\subset\mathbb{Z}$
b. $\left\{-3;0;\frac{12}{3};6\right\}\subset\mathbb{Z}$
c. $\left\{-\frac{6}{2};0;\sqrt{9}\right\}\subset\mathbb{N}$
d. $\left\{-3;0;\frac{1}{5};\sqrt{2}\right\}\subset\mathbb{Q}$

57 Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$
a. $0^n+n^0=(0+n)^0$
b. $1^n+(-1)^n=0$
c. $2^n+2^n=2^{n+1}$
d. $3^n+3^n=3^{n+1}$

58 **a.** $\sqrt{(30-7\sqrt{5})^2}+7\sqrt{5}$ est un entier.
b. $\sqrt{9+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}}$ est un entier.
c. $\left(\sqrt{\left(\frac{15}{3}+\sqrt{63}\right)}\right)^2-\frac{30\sqrt{7}}{\sqrt{100}}$ est un entier.

QCM Une seule réponse exacte

59 On considère les nombres $A=\sqrt{7+2\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{3}+2$ alors :
a. $A>B$ **b.** $A<B$ **c.** $A=B$
d. On ne peut pas conclure.

60 L'équation $|x-2|=3$ admet pour ensemble des solutions
a. $S=\{-5;1\}$ **b.** $S=\{-1;5\}$
c. $S=\{-3;3\}$ **d.** $S=\varnothing$

61 L'équation $|x+4|=-2$ admet pour ensemble des solutions
a. $S=\{2;6\}$ **b.** $S=\{-6;-2\}$
c. $S=\{-2;6\}$ **d.** $S=\varnothing$

62 L'inéquation $|x-1| \geqslant -1$ admet pour ensemble des solutions
a. $S=[0;2]$
b. $S=[-2;0]$
c. $S=\mathbb{R}$
d. $S=\varnothing$

63 L'inéquation $|x+2| \geqslant 2$ admet pour ensemble des solutions :
a. $S=[-4;0]$
b. $S=[0;4]$
c. $S=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$
d. $S=]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$

Écriture décimale périodique d'une fraction à l'aide de Python

64 Mécanismes d'une division euclidienne

Pour trouver l'écriture décimale d'une fraction, on a recours à la division euclidienne. On va d'abord se remémorer les mécanismes de la division, que l'on reproduira dans un algorithme puis dans un script en Python pour afficher autant de décimales qu'on le souhaite.

1. Considérons la fraction $\frac{30}{7}$.

Effectuons la première étape de la division de 30 par 7 :

30	7
2	4

Ainsi le début de l'écriture décimale de $\frac{30}{7}$ est 4,…

On poursuit la division en abaissant 0 et en divisant 20 par 7 :

20	7
6	2

Ainsi le début de l'écriture décimale de $\frac{30}{7}$ est 4,2…

2. Poursuivons les divisions successives pour obtenir les 6 premières décimales de la fraction $\frac{30}{7}$.

a. Quel est le dernier reste ? Parmi toutes les divisions faites, y a-t-il deux restes identiques ?

b. Sans faire d'autres divisions donner les 12 premières décimales de la fraction $\frac{30}{7}$.

65 Écriture décimale d'une fraction à l'aide de Python

On veut reproduire les divisions successives précédentes à l'aide de Python, en gardant en mémoire les quotients successifs qui formeront le début de l'écriture décimale de la fraction.

Sans utilisation de bibliothèque supplémentaire, Python affiche moins de 20 chiffres après la virgule, on va donc stocker le nombre obtenu dans une chaîne de caractères pour se libérer de cette restriction.

1. On a écrit ci-dessous l'algorithme d'une fonction **division** qui prend en argument les entiers naturels non nuls a et b et n le nombre de décimales souhaité de l'écriture décimale de $\frac{a}{b}$, et qui renvoie la chaîne de caractères **resultat** contenant cette écriture décimale.

a. Compléter le script Python ci-dessous :

```
Fonction division(a,b,n)
  q ← le quotient de la division euclidienne de a par b
  a ← le reste de la division euclidienne de a par b
  resultat ← convertir q en chaîne de caractères et
             ajouter ","
  Pour i allant de 0 à n–1
    a ← a×10
    q ← quotient de la division euclidienne de a par b
    a ← reste de la division euclidienne de a par b
    resultat ← resultat + q converti en chaîne de
    caractères
  Fin Pour
  Renvoyer resultat
```

on va répéter *n* fois les divisions successives pour obtenir *n* décimales

ceci correspond à l'action « d'abaisser un zéro » dans la division

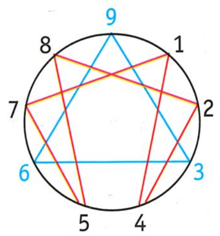
```
def division(a,b,n):
    q=a//b
    a=a%b
    resultat=str(q)+","
    for i in range(n):
        a=
        q=
        a=
        resultat=resultat+str(q)
    return resultat
```

b. Exécuter ce script puis utiliser la fonction division pour donner les 21 premières décimales de l'écriture décimale de $\frac{30}{7}$.

c. L'écriture décimale de $\frac{30}{7}$ est-elle périodique ? Justifier.

d. Sans utiliser la fonction division, déterminer les 3 décimales qui suivent les 21 décimales de la question **b.**

2.a. Indiquer sur la figure ci-contre des flèches qui permettent de visualiser la période de l'écriture décimale de $\frac{30}{7}$.



b. Sans utiliser la fonction **division** compléter l'écriture décimale des nombres suivants :

- $\frac{1}{7}=0{,}14\ldots.$
- $\frac{2}{7}=0{,}28\ldots.$
- $\frac{3}{7}=0{,}4\ldots.$
- $\frac{4}{7}=0{,}5\ldots.$
- $\frac{5}{7}=0{,}7\ldots.$
- $\frac{6}{7}=0{,}\ldots.$

On soulignera la période pour signifier qu'elle se répète à l'infini.

Approximation de $\sqrt{2}$ par balayage

On souhaite déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$. On sait que ce nombre est l'unique solution positive de l'équation $x^2=2$. On utilisera dans cette activité la propriété suivante :

Quels que soient les réels a et b positifs, $a\leqslant b$ équivaut à $a^2\leqslant b^2$.

Ainsi l'inégalité $1\leqslant 2\leqslant 4$, qui peut s'écrire $1^2\leqslant \sqrt{2}^2\leqslant 2^2$ est équivalente à $1\leqslant\sqrt{2}\leqslant 2$.

	A	B
1	x	$\lvert x^2-2\rvert$
2	1	
3	1,1	
4	1,2	
5	1,3	
6	1,4	
7	1,5	
8	1,6	
9	1,7	
10	1,8	
11	1,9	
12	2	

	A	B
1	x	$\lvert x^2-2\rvert$
2	1	1
3	1,1	0,79
4	1,2	0,56
5	1,3	0,31
6	1,4	0,04
7	1,5	0,25
8	1,6	0,56
9	1,7	0,89
10	1,8	1,24
11	1,9	1,61
12	2	2

66 Balayage à l'aide d'un tableur

1.a. Dans une feuille de calcul, reproduire les colonnes ci-contre :

b. Quelle formule faut-il écrire en B2 pour calculer $\lvert x^2-2\rvert$?

Recopier vers le bas cette formule pour les différentes valeurs de x ?

INDICATION

La valeur absolue dans le tableur s'écrit ABS.

c. Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ proposez-vous à partir des résultats du tableur ?

Donner un encadrement à 10^{-2} près de $\sqrt{2}$.

2.a. On souhaite obtenir une valeur approchée avec 2 décimales de précision.

Proposer les valeurs de x à entrer dans les cellules A2 à A12.

b. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près ainsi qu'un encadrement à 10^{-2} près.

c. Modifier à nouveau votre feuille de calcul pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

67 Balayage à l'aide d'une boucle Pour

Dans les calculs qui vont suivre, on va très vite avoir besoin de la valeur absolue.

1. Création de la fonction Python **valabs** qui prend comme argument un réel x et renvoie la valeur absolue de x :

```
Fonction valabs(x)
  Si x ⩾ 0 alors
    Renvoyer.........
  Sinon
    Renvoyer.........
  FinSi
Fin
```

```
def valabs(x):
    if x>=0:
        return
    else:
        return
```

Compléter l'algorithme et le script Python de la fonction **valabs.**

2. Pour toutes les valeurs 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; … ; 1,9 et 2 on va calculer :

$\lvert 1^2-2\rvert,\ \lvert 1{,}1^2-2\rvert,\ \lvert 1{,}2^2-2\rvert,\ldots,\ \lvert 1{,}9^2-2\rvert$ et $\lvert 2^2-2\rvert$

Pour déterminer la plus petite de ces valeurs.

a. Compléter le script en Python de l'algorithme de la fonction **pluspetit** ci-dessous :

```
Fonction pluspetit()
  x ← 1
  a ← 1
  y ← |x² – 2|
  Pour i allant de 1 à 10
    x ← x + 0,1
    Si |x² – 2| < y alors
      y ← |x² – 2|
      a ← x
    FinSi
  FinPour
  Renvoyer a
Fin
```

```
def pluspetit():
    x=1
    a=1
    y=
    for i in range(10):
        x=
        if                :
            y=valabs(x**2-2)
            a=x
    return a
```

b. Que représente a ?

c. Exécuter le script et lancer la fonction **pluspetit** et donner la valeur affichée.

d. On souhaite améliorer la précision du résultat pour avoir 2 chiffres de précision après la virgule. Que faut-il modifier dans la fonction **pluspetit** ?

Caractériser les nombres

68 VRAI ou FAUX ?

a. Un développement décimal périodique est une suite finie de décimales.
b. Un nombre dont le développement décimal n'est pas périodique est toujours irrationnel.
c. Un nombre décimal peut avoir un développement décimal périodique.

69 **Qui suis-je ?**
Je suis un intervalle dont la réunion avec [4 ; 6] est [2 ; 6] et dont l'intersection avec [3 ; 7] est [3 ; 5[

70 **a.** $[-5\,;-2[\,\cup\,]-4\,;6{,}5]\cup[0\,;7{,}12[$
b. $]-\infty\,;-10]\cup\,]-14\,;2]\cup[-5\,;4{,}5]$
c. $[-7\,;1[\,\cap\,]-3\,;2{,}5]\cap[0{,}5\,;6{,}7[$
d. $]-\infty\,;4[\,\cap\,]-4\,;+\infty]\cap[-1\,;12{,}05[$.

71 Parmi les nombres suivants, lesquels sont des décimaux ? $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$.

72 **L'intrus**
Parmi les nombres suivants, dans chaque cas déterminer le nombre intrus.
a. $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{43}{10}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{16}$. **b.** $\frac{7}{11}$; $\frac{13}{25}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{5}{14}$; $\frac{21}{17}$.

73 À l'aide de votre calculatrice, dites si ces nombres sont décimaux. Dans le cas contraire, identifier leur période.
a. $\frac{3}{80}$ **b.** $\frac{3}{7}$ **c.** $\frac{581}{165}$ **d.** $\frac{1\,267}{625}$ **e.** $\frac{1}{81}$

74 À l'aide de votre calculatrice, que remarquez-vous sur les périodes des rationnels suivants ?
$\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$

75 Calculer $(1+2+3+4+5)^2$ puis $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$.
Que remarquez-vous ?

Le SAVIEZ-VOUS ? On montre en mathématiques que le carré de la somme des n premiers entiers est égal à la somme des cubes de ces entiers.
Quel que soit l'entier naturel non nul n,
$(1+2+3+\ldots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

76 Quel nombre est le plus grand nombre : 700^{600} ou 600^{700} ?

77 LOGIQUE Compléter les phrases suivantes à l'aide de « et » ou « ou »
a. $[1\,;+\infty[$ sont les réels tels que $x\geqslant 1\ldots.\,x>-1$.
b. -5 ; 0 et 5 sont des nombres réels.... des entiers relatifs.
c. 0 ; 5 ; 12 ;-4 et 560 sont des entiers pairs.... des entiers relatifs.
d. $]-\infty\,;2]\cup[9\,;+\infty[$ sont les réels plus grands que 9 .... plus petit que 2.
e. $[-1\,;4[$ est l'ensemble des réels tels que $x<4$ .... $x\geqslant-1$
f. $[2\,;+\infty[$ sont les réels tels que $x\geqslant 2\ldots.\,x>5$.

78 LOGIQUE Compléter par : $P\Rightarrow Q$ ou $Q\Rightarrow P$ ou $P\Leftrightarrow Q$.

P	???	Q
a. $x<2$	....	$x\leqslant 2$
b. $-4<x\leqslant-2$	....	$-3<x\leqslant-2$
c. $x\in\,]-\infty\,;+\infty[$	....	$x\in[0\,;2[$
d. $x\in\,]-\infty\,;6[\,\cap\,]-5\,;9]$	....	$x\in\,]0\,;1[$
e. $x\in\,]-1\,;2[\,\cup\,]-2\,;1]$	....	$x\in\,]-\infty\,;8[$

79 DÉMONTRER
Démontrer que $\frac{1}{7}$ n'est pas un décimal.

80 DÉMONTRER
Démontrer que $\sqrt{3}$ est un irrationnel.

81 Déterminer le signe de $-15x+45$ et de $x+14$.
a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(x-5)(x+9)>0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(-3x-18)(-x-2)\leqslant 0$.

82 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x(2x+1)<0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(3x-4)(-5x+2)\geqslant 0$.

83 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, $-2x(2x-5)<0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(5x+4)(-7x-10)\geqslant 0$.

84 DÉMONTRER
a. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $2^n=2^{n+1}-2^n$.
b. En déduire une expression simplifiée de la somme
$$S_n=1+2+4+8+16+\ldots+2^n$$
c. Application : simplifier l'expression de la somme suivante :
$$S_{100}=1+2+4+8+16+\ldots+2^{100}$$

85 Les capacités de stockage en informatique utilisent une unité appelée *octet* (symbole **o**)
Un caractère alphanumérique est codé sur 1 octet. Ainsi :

Unité	Kilo-octets	Méga-octets	Giga-octets	Téra-octets
Notations	ko	Mo	Go	To
Conversion	1 ko = 1 000 o	1 Mo = 1 000 ko = 10^6 o	1 Go = 1000 Mo = 10^9 o	1 To = 1 000 Go = 10^{12} o

1. Donner le nombre d'octets en écriture scientifique :
a. D'une mémoire de 32 Go.
b. D'une mémoire d'ordinateurs de 0,5 To.
c. D'un mail de 15 ko.
2. Une ligne de communication a un débit de 128 Ko par seconde, calculer le temps nécessaire pour transmettre :
a. un mail de 160 000 o ;
b. une photographie de 82 Mo ;
c. une musique de 4 Mo.

86 **1.** Simplifier les nombres suivants :
$$A=\frac{\left(2\times10^{-5}\right)^3\times2{,}5}{\left(5\times20^{-4}\right)^2}\quad\text{et}\quad B=\left(\frac{1}{16}\right)^{-3}\times12^{-4}\times\left(0{,}09\times10^9\right)^2$$
2. En comparant leurs carrés, déterminer si les nombres réels donnés sont égaux
$5\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ et $1+\sqrt{2}$

Histoire des MATHS
Simon Stevin, mathématicien hollandais du XVI^e^ siècle, écrit de nombreux ouvrages sur les racines carrées, les puissances et les nombres irrationnels. Mais il faudra attendre la fin du XIX^e^ siècle pour voir l'ensemble des réels associé à l'ensemble des points d'une droite orientée, appelée droite réelle.

87 Simplifier les écritures des nombres
$A=\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^4$ $B=\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{7}}}\right)^4$ $C=\frac{5}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3$
$D=\sqrt{\frac{4}{25}}+\sqrt{\frac{36}{25}}$ $E=\sqrt{\frac{1}{100}}+\sqrt{\frac{49}{25}}$ $F=\sqrt{\frac{\frac{9}{8}}{2}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{81}}}$.

88 VRAI ou FAUX ?
a. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ $\sqrt{x}\leqslant x$, autrement dit la racine carrée d'un réel positif est toujours inférieure à ce réel ?
b. $\sqrt{-x}$ n'a pas de sens car il y a un signe moins sous la racine carrée ?
c. Pour tous réels x, $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$.

89 DÉMONTRER **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$
b. En déduire la valeur de la somme S définie par :
$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2\,020\times2\,021}.$$

Caractériser les nombres à l'aide d'un algorithme

90 On considère le script suivant :

```
def quisuisje(x):
    if x<=-1 :
        a=2*x-1
    elif x<4 :
        a=x/3
    else :
        a=x**2-3
    return a
```

Quel est le plus petit ensemble auquel appartient quisuisje(x) lorsque l'on saisit les arguments :
-2 ? $\sqrt{2}$? $3\sqrt{2}$? $\frac{1}{2}$? et $\frac{3}{2}$?

91 On considère le script suivant :

```
def dichotomie(a,b,n):
    while b-a>n:
        if (a+b)/2-sqrt(2)>0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return (a,b)
```

a. En recopiant et complétant le tableau suivant, quel est l'affichage de ce script sur les arguments sont (1,2,0.1) ?

$b-a$					
a	1				
b	2				

b. Que représente l'affichage de ce script ?
c. Que doit-on modifier si on souhaite un encadrement à 10^{-3} près de $\sqrt{7}$?

92 ALGO On considère l'algorithme de la fonction nombre ci-dessous qui prend comme argument un nombre a et qui renvoie e :

```
Fonction nombre(a)
    b prend la valeur de a².
    c prend la valeur la valeur a-b
    d prend la valeur 2c
    e prend la valeur d − c + b.
    Renvoyer e
Fin
```

Préciser le plus petit ensemble auquel appartient **nombre(a)**. pour les arguments de a suivantes : 2 ; -4 ; $\sqrt{2}$.

93 Lorsqu'on exécute le script ci-contre :

```
from math import *
def nombre (a):
    b=a/2
    c=3+b
    d=sqrt(c)
    return d
```

a. nombre (3) est-il un entier ?
b. nombre (12) est-il un entier ?
c. nombre (−4) est-il un entier ?
d. Quel sera l'affichage de nombre (−12) ?

94 ALGO On considère l'algorithme de la fonction operation ci-dessous.

```
Fonction operation(a)
    b prend la valeur de −a.
    c prend la valeur la valeur b²
    d prend la valeur −2c
    e prend la valeur d + |a|
    Si e ∈ ℤ alors
        renvoyer « entier »
        Sinon Renvoyer « pas entier. »
        Fin du si
Fin
```

Qu'affiche la fonction operation lorsqu'on lui donne comme argument :
• -2 ? • 3 ? • $\sqrt{2}$?

95 On considère le script de la fonction compteur prenant comme argument un nombre strictement compris entre 0 et 1.

```
from math import *
def compteur(a):
    N=0
    while a>=0.1:
        a=a*a
        N=N+1
    return N
```

a. Quelle est la valeur de compteur (0.9) ? compteur (0.1) ?
b. Que représente l'affichage de ce programme ?

Approximation et encadrements

96 **1.** Donner une valeur approchée de $\dfrac{\sqrt{56}-1}{3+\sqrt{2}}$
a. à 10^{-1} près par défaut ;
b. à 10^{-2} près ;
c. à 10^{-3} près par excès.

2. Donner une valeur approchée de $\dfrac{2^3\left(1+8\sqrt{2}\right)}{21}$
a. à 10^{-2} près par défaut ;
b. à 10^{-1} près ;
c. à 10^{-4} près par défaut.

97 **Approximation**
a. Une pièce de théâtre a duré $\dfrac{563}{6}$ minutes.
Donner une approximation de cette durée en heure, à la minute près, puis à la seconde près.
b. La Lune effectue une orbite autour de la Terre en $\dfrac{3\,277}{5}$ heures
Donner une valeur approchée en jour à l'heure près. Puis à la minute près.

Le SAVIEZ-VOUS ?
En France, en 1933, **Ernest Esclangon**, directeur de l'Observatoire de Paris, met au point le premier dispositif automatique de diffusion de l'heure par téléphone car il ne supporte plus que sa seule ligne téléphonique ne serve qu'à donner l'heure, du fait des appels téléphoniques incessants pour connaître l'heure !

98 LOGIQUE
Choisir la bonne réponse.
1. P : 0,5 est une valeur approchée à 10^{-1} près de x.
Q : 0,51 une valeur approchée à 10^{-2} près de x.
a. $P \Rightarrow Q$ **b.** $Q \Rightarrow P$ **c.** $P \Leftrightarrow Q$
2. P : 2,86 une valeur approchée par de x excès à 10^{-2} près.
Q : 2,9 une valeur approchée par de x excès à 10^{-1} près.
a. $P \Rightarrow Q$ **b.** $Q \Rightarrow P$ **c.** $P \Leftrightarrow Q$
3. P : −3,62 une valeur approchée par de x excès à 10^{-2} près.
Q : −4 une valeur approchée par de x à l'unité près.
a. $P \Rightarrow Q$ **b.** $Q \Rightarrow P$ **c.** $P \Leftrightarrow Q$

99 Le nombre d'Euler e est égal à 2,718 281 828...
Sachant que $2{,}718 < e < 2{,}719$, encadrer le nombre $A = \dfrac{11-3e}{5}$.

Le SAVIEZ-VOUS ?
Le Suisse Leonhard Euler (1707-178) est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il a notamment associé son nom au nombre réel e, constante mathématique à la base des fonctions logarithmes et exponentielles.

100 **a.** En utilisant l'encadrement $3{,}1622 < \sqrt{10} < 3{,}1623$, donner un encadrement de :
$A = 4+\sqrt{10}$ $B = 3\sqrt{10}-1$ $C = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $D = 10-\sqrt{10}$.
b. Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, écrire un encadrement de :
$M = 5\sqrt{2}$ $N = 5+2\sqrt{2}$ $P = \dfrac{1-\sqrt{(2)}}{1+\sqrt{(2)}}$.

101 On considère un disque de rayon 10 cm et un rectangle de côté 15 cm sur 21 cm.
Déterminer :
a. l'aire A en cm² du rectangle.
b. l'aire B en cm² du disque en prenant 3,14 comme valeur approchée de π. Comparer A et B.
c. l'aire B en cm² du disque en prenant 3,15 comme valeur approchée de π. Comparer A et B.

102 Mme Cack, qui dirige une entreprise, annonce à l'un des employés, M. Martin, que son salaire de 2 200 € va subir une augmentation entre 3 % et 5 %.
Dans quel intervalle se situera le nouveau salaire de M. Martin ?

103 Le prix d'un billet de train entre deux villes A et B varie entre 15 € et 22 € selon les jours. Traduire par un intervalle le prix de douze billets entre ces deux villes.

104 Décomposer l'intervalle [0 ; 1] en cinq intervalles disjoints et de même amplitude. Ainsi l'intersection de ces cinq intervalles vaut l'ensemble vide et leur union vaut [0 ; 1].

105 Voici les variations de température d'une ville donnée selon les saisons :

Printemps	Été	Automne	Hiver
de 2 °C à 15 °C	de 11 °C à 35 °C	de −2 °C à 21 °C	de −12 °C à 13 °C

a. Donner sous forme d'intervalle les variations annuelles de température de cette ville.
b. Quelle tranche de températures ne permet pas de conclure si l'on est au printemps, en été, en automne ou en hiver ? Donner le résultat sous forme d'intervalle.
c. Inversement, quelle tranche de températures permet de conclure qu'on est en été ? puis en hiver ?

106 Dans chacun des cas, obtenir un encadrement de la valeur de x.
a. $-3 < x-3 < 5$ **b.** $-10 \leqslant -x+2 \leqslant -5$
c. $|x+5| > 2$ **d.** $|2x-7| \leqslant 5$
e. $d(x, 1{,}5) < 0{,}5$ **f.** $d(-2, -x) \leqslant 8$
g. 3,4 est une valeur approchée de x à 10^{-3}.
h. −1.2 est une valeur approchée par excès de x à 10^{-2}.
i. 53,4 est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-1}.

107 **1.** Sachant que $-5 < x < -2$ et $3 < y < 7$ un encadrement de :
a. $x+y$ **b.** $x-y$ **c.** $2x-y$
2. Sachant que $\dfrac{1}{7} < x < \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{6} < y < \dfrac{1}{5}$, donner un encadrement de :
a. $x+y$ **b.** $x-y$ **c.** xy **d.** $2x-xy$

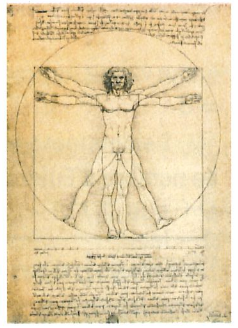
108 On donne : 46,32 est une valeur approchée de x à 10^{-1} près et 46,31 est une valeur approchée de y à 10^{-2} près.
Que peut-on dire que $x > y$?

109 Compléter le tableau suivant :

Valeur absolue	Distance	Intervalle(s) auxquels appartient x	Inégalités vérifiées par x
$\|x+2\| < 1$			
	$d(x, a) \geqslant r$		
			$x \leqslant -5$ ou $x \geqslant 5$
		$x \in]2 ; 8[$	

Chercheurs d'hier

Le **nombre d'or** est $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans l'antiquité, ce nombre était paré de vertus magiques. Nos ancêtres ont longtemps cru à l'existence d'une proportion privilégiée écrite sous la forme $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$. En usant de procédés empiriques, ils parviennent à tracer un cercle et à le partager en deux, trois, quatre, cinq et même dix parties égales. Par ces figures ils mettent en évidence ce nombre particulier.



FIBONACCI (1452 ; 1519) fut sans doute le mathématicien le plus habile de toute l'époque médiévale chrétienne. Il nous a laissé son problème des lapins qui a un lien avec le nombre d'or.
En 1490, **Léonard DE VINCI** réalise un dessin resté célèbre, intitulé ***L'homme de Vitruve***, où il procède à une étude mathématique des proportions du corps humain. L'allemand **Albrecht Dürer** (1471-1528) lui aussi enthousiaste quand il découvre la perspective et les travaux de Léonard de Vinci, se plonge alors dans les Éléments d'Euclide : désormais il commence ses dessins en traçant un faisceau de droites et de cercles, pour pouvoir utiliser le nombre d'or…

110 Le nombre d'or

Partie A. Les lapins de Fibonacci
Dans son traité mathématique ***Liber Abaci***, le mathématicien Fibonacci pose le problème suivant :
« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, en commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »
• Au départ (génération 1), il y a un unique couple de lapins.
• Ce couple de lapins ne procrée pas le premier mois, mais il engendre chaque mois à partir du deuxième mois un couple de lapins. Chaque couple ainsi engendré se comporte de la même façon que le premier couple : le premier mois après sa naissance, il ne procrée pas, puis à partir du deuxième mois, il engendre chaque mois un nouveau couple.
• Le nombre de couples à la fin de chaque mois constitue les nombres de la suite de Fibonacci :

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13

1. Donner les treize premiers nombres de la suite de Fibonacci
2. Calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près des quotients de deux nombres successifs de la suite de Fibonacci.

Partie B. Approximation fractionnaire du nombre d'or
1. Calculer la valeur exacte des quotients suivants :

$$A_1 = 1+\frac{1}{2} \qquad A_2 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} \qquad A_3 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

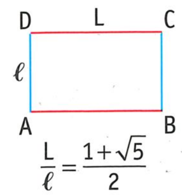
2. On considère le script Python ci-contre :

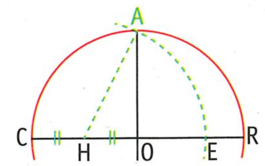
```python
def nbr_or(p):
    u=1+1/2
    for i in range (1,p):
        u=1+1/u
    return u
```

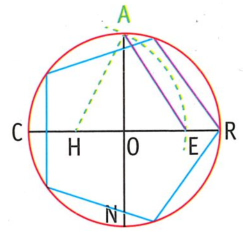
a. En utilisant le script donner une valeur approchée à 10^{-3} près de A_4 ; A_5 et A_6.
b. Déterminer l'erreur commise avec la valeur exacte du nombre d'Or.

Partie C. Quelques propriétés algébriques du nombre d'or
1. On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
a. Calculer φ^2, puis $\varphi+1$.
b. Montrer que φ est solution de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
2. Montrer que φ vérifie $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Partie D. Le nombre d'or en géométrie
Jusqu'à une époque récente, les proportions des édifices sacrés étaient basées sur des rapports jugés harmonieux voire d'origine divine, puisque les mathématiques étaient censées être l'émanation des dieux.
Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport longueur sur largeur est égal au nombre d'Or.

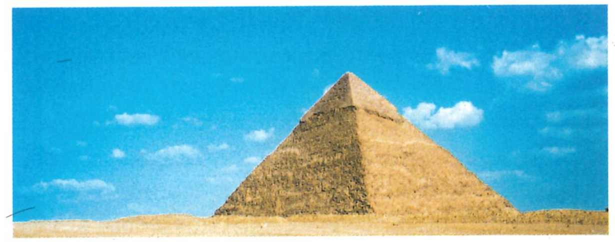






1. Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR]. Soit H le milieu de [OC].
2. La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et N. Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E.
a. Démontrer que les longueurs OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.
b. Reporter la longueur AE sur le cercle à partir du point R pour obtenir les sommets du pentagone régulier.
c. Tracer un pentagone régulier

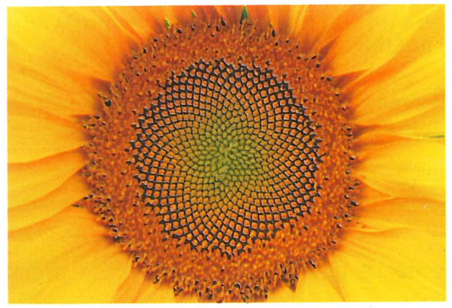
Partie E. Le nombre d'or en architecture
La hauteur de la pyramide est de 148,2 m et sa base carrée est de 232,8 m. Calculer la longueur de l'arête. Calculer le rapport arrête/base.

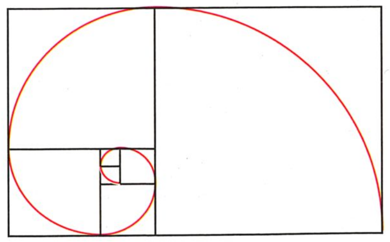


Travail en îlot

111 La spirale d'or

Pour construire une spirale d'or, on construit un rectangle d'or (voir l'exercice 110) dans lequel on construit un grand carré de côté la largeur du rectangle. On réitère l'opération dans le rectangle restant qui est un rectangle d'or… et ainsi de suite, … Puis, on construit des quarts de cercle dans les carrés.





Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la spirale constituée de 6 quarts de cercle obtenu à partir d'un rectangle d'or de largeur 15 centimètres.

112 Des simplifications étonnantes

1. Jules a simplifié la fraction $\dfrac{65}{66}$. Il explique à Julie ; c'est facile : je barre les 6 et j'obtiens $\dfrac{5}{6}$ ».
a. Le résultat est-il correct ?
b. Que pensez-vous de la démarche utilisée ?
2.a. Prouvez que, pour tous nombres réels a, b, c et d non nuls vérifiant la condition $b+d \neq 0$:
si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.
b. En utilisant **a.** et en remarquant que $665 = 10 \times 65 + 15$ et que $226 = 10 \times 26 + 6$, montrer que $\dfrac{665}{266} = \dfrac{5}{2}$.
3. Julie affirme : « j'en déduis que $\dfrac{66\,665}{26\,666} = \dfrac{5}{2}$.
Expliquer sa démarche.
4. On admet, dans le cas général, que l'égalité $\dfrac{66\ldots65}{26\ldots66} = \dfrac{5}{2}$ est vraie, le numérateur et le dénominateur de la première fraction comportant n fois le chiffre 6, n étant un entier naturel non nul.
Jules annonce alors à Julie : « en utilisant ce qui précède, je peux donner mentalement le quotient et le reste de la division euclidienne de 66…65 par 26…66, chacun des deux nombres comportant 2 015 fois le chiffre 6 ». Est-ce vraisemblable ?

Olympiade académique, Clermont 2015

NUMÉRIQUE
Exercices différenciés

113 Racine de n

Voici un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{n}$ pour tout entier naturel non nul à p près :

Langage naturel	Script Python

Affecter à u la valeur n
Tant que $u-\sqrt{n}>p$
  Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\left(u+\frac{n}{u}\right)$
Fin du tant que
Afficher u
	`from math import*`
	`def val_app (n,p):`
	`    u=n`
	`    while u-sqrt(n)>p:`
	`        u=(1/2)*(u+n/u)`
	`    return u`

1. Appliquer cet algorithme avec $n=2$ et $p=0{,}01$ en complétant le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-3} près :

u	2	1,5	…	
$u-\sqrt{2}$	0,586	…	…	

Donner l'affichage de l'algorithme.
2. Quel est l'affichage de val_app (3,0.0001) ?
3. Quel est l'affichage de val_app (7,0.00001) ?

114 Les approximations de π, de l'antiquité à nos jours

Un des nombres les plus anciens est le nombre π. Les approximations de sa valeur approchée ont évolué au cours du temps :

Époque	Approximation de π
– 2000 babyloniens	$3+\frac{7}{60}+\frac{1}{120}$
– 1600 Papyrus de Rhind	$\frac{256}{81}$
Inde – 700 Shatapatha Brahmana	$\frac{25}{8}$
Grèce – 500 Archimède	$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$
Chine 300 Zu Chongzhi	$\frac{355}{116}$
Inde 500 Aryabhata	$\frac{62\,832}{20\,000}$
Perse 1 400 Al Kashi	$\frac{1}{2}\left(6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\ldots\right)$
France 1 500 Nicolas de Cuse	$\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

1. Pour chaque approximation de π, donner à l'aide de l'approximation de votre machine, l'erreur de chaque mathématicien.
2. À la fin de XVIII[e] siècle, Leibniz donne une approximation de la valeur de π.
a. Le début de son approximation est :
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots\ldots\ldots\ldots$$
Donner les deux termes suivants des pointillés.
b. En déduire une formule d'approximation de π.
3. On considère le script Python suivant :

```
def pi (p):
    d=4
    for i in range(1,p+1):
        d=d+4*(-1)**i/(2*i+1)
    return d
```

Pour quelle valeur de p obtient-on une approximation de π de 3,14 ?
4. Euler en 1735 donne lui aussi une nouvelle approximation de la valeur de π.
Formule d'Euler : $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots\ldots\ldots\ldots$
a. Donner le terme qui suit $\frac{1}{16}$.
b. Écrire un script Python afin de déterminer une valeur approchée de π.
5. Un poème célèbre permet de retenir les décimales de π. Son principe est le suivant : la longueur de chaque mot donne une décimale et la ponctuation ne code rien.

Que	j'	aime	à	faire	apprendre	ce	nombre	utile	aux	sages !
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5

Voici le poème :

> Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !
> Immortel Archimède, artiste ingénieur,
> Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
> Pour moi, ton problème eut de pareils avantages

À l'aide de ce poème, reconstituer les premières décimales de π.

Le SAVIEZ-VOUS ?

It's up to you to find the next one!
In March 2019, Emma Haruka Iwao, a Japanese computer scientist, working for the American company Google has found calculated the world's most accurate value of pi; which included 31.4 trillion digits: to be more specific, 31 415 926 535 897 digits. The computers used to made that calculation have required... 121 days to reach that result.

115 Galois-Leaks

Pour rentrer dans une zone de recherche mathématique secrète, Monsieur Galois possède un mot de passe. L'ordinateur demande à M. Galois de taper son mot de passe, en retour après un calcul s'affiche à l'écran un code à quatre chiffres (a, b, c, d).
M. Galois détermine à partir de ce code un nombre compris entre 0 et 9 à l'aide du script ci-dessous :

```
from math import *
def code(a,b,c,d):
    p=1000*a+100*b+10*c+d
    s=p
    while s>=10:
        k=p%(a+b+c+d)
        if k<10:
         s=k
        else:
          s=k%10
    return s
```

a. L'ordinateur propose 2020 à M. Galois, quel est le nombre s généré ?
b. Même question si l'ordinateur propose 1789 ?
c. L'ordinateur peut-il lui proposer le code 0000 ?

116 Retrouver l'écriture rationnelle

Le but de l'exercice est de déterminer un nombre rationnel connaissant une écriture décimale comportant une période.
Retrouver l'écriture rationnelle des nombres $a=0{,}7\underline{48}$ et $b=12{,}23\underline{0769}$.

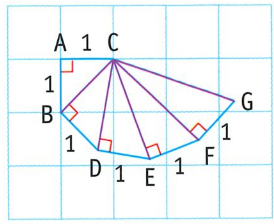
MÉTHODE

Retrouver un rationnel à partir de son écriture décimale périodique.
1. On isole la période en multipliant par une puissance de 10 afin qu'à droite de la virgule on obtienne uniquement la période.
2. On multiplie par une puissance de 10^n où n est la longueur de la période.
3. On remplace la période.
4. On conclut.
Exemple : considérons $a=0{,}5\underline{1}$ et $b=2{,}15\underline{41}$.

$a=0{,}5\underline{1}$ $10a=5{,}\underline{1}$ $10a-5=0{,}\underline{1}$ $10(10a-5)=1{,}\underline{1}=1+0{,}\underline{1}$ $100a-50=1+10a-5$ $90a=46$ $a=\frac{46}{90}=\frac{23}{45}$	$b=2{,}15\underline{41}$ $100b=215{,}\underline{41}$ $100b-215=0{,}\underline{41}$ $10^2(100b-215)=41{,}\underline{41}$ $10\,000b-21\,500=41+0{,}\underline{41}$ $10\,000b-21\,500$ $=41+100b-215$ $9\,900b=21\,326$ $b=\frac{21\,326}{9\,900}=\frac{10\,663}{4\,950}$

117 En escargot

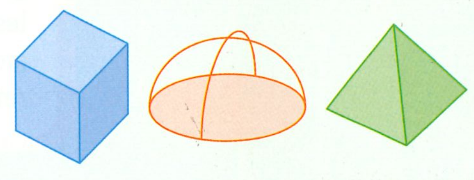
Calculer la longueur CG.



Olympiades

118 Échange thermique

En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m², à son volume, mesuré en m³. Le facteur de compacité $c=\frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.
1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.
a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.
b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.
c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a et de hauteur verticale a.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?
2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z.
a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.
c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 : $A+B+C\geqslant 3$.

D'après Olympiades, Métropole 2016