Correction du devoir de mathématiques n°2

La calculatrice n'était pas autorisée

Exercice 1 : calcul numérique **4 points**

1. Calculer en détaillant les calculs : attention aux priorités !

$$A = 12 - 2(3\text{x}2 - 8)^2 = 12 - 2(6-8)^2 = 12 - 2(-2)^2 = 12 - 2\text{x}4 = 12 - 8 = 4$$

$$B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{5\text{x}\frac{2}{15}} = \frac{\frac{2\text{x}3 - 1}{3}}{\frac{10}{15}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2\text{x}5}{3\text{x}5}} = \frac{5}{3}\text{x}\frac{3}{2} = \frac{5}{2} \qquad C = (x^{-6})^3 = x^{-6\text{x}3} = x^{-18}$$

$$D = a^{-4}b^5(ab)^2 = a^{-4}b^5a^2b^2 = a^{-4}a^2b^5b^2 = a^{-2}b^7$$

2. Simplifier les nombres : 2 points

$$A = \sqrt{18} = \sqrt{9\text{x}2} = \sqrt{9}\text{x}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{12}\text{x}\sqrt{27} = \sqrt{3\text{x}4}\text{x}\sqrt{9\text{x}3} = \sqrt{3}\text{x}\sqrt{4}\text{x}\sqrt{9}\text{x}\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{x}\sqrt{3}\text{x}2\text{x}3 = 3\text{x}2\text{x}3 = 18$$

$$C = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad \text{car } \sqrt{5} > 2$$

Exercice 2 : inégalités et intervalles **5 points**

1. Compléter le tableau suivant 3 points

Inégalité(s)	Intervalle(s)
$-2 < x \leq \frac{1}{2}$	$x \in \left]-2; \frac{1}{2}\right]$
$x \geqslant -\sqrt{3}$	$x \in [-\sqrt{3}; +\infty[$
$x > -\frac{3}{5}$ ou $x < -\frac{5}{3}$	$x \in \left]-\frac{3}{5}; +\infty\right[\cup \left]-\infty; -\frac{5}{3}\right[$
$x \leq \frac{10}{11}$ et $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{9}{10}$	$x \in \left]-\infty; \frac{10}{11}\right] \cap \left[\frac{3}{4}; \frac{9}{10}\right]$

2. Soit les intervalles I =]−1;3] et J =]−3;5[.

   a. I ∩ J =]−1;3] b. I ∪ J=]−3;5[.

Exercice 3 : ensembles de nombres **3 points**

Compléter en utilisant les symboles appropriés parmi $\in, \notin, \subset, \not\subset$

$2{,}1 \in]2;3]$	$2{,}1 \notin \{2;3\}$	$2 \notin]2;3]$
$\{5;3;4;12\} \subset \mathbb{N}$	$-5 \notin]-\infty;-6]$	$\pi \in]3;4[$
$3 \in]2;3]$	$]-\infty;-2] \not\subset \mathbb{Z}$	$[1;2,7[\subset]-\infty;3,5]$

Exercice 4 : résolution d'équations et d'inéquations **5 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes en précisant l'ensemble des solutions sous la forme d'un ensemble ou d'un intervalle.

1. $3x = 7$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{7}\right\}$

2. $2x + 7 = 3$

$\Leftrightarrow 2x = 3 - 7$

$\Leftrightarrow 2x = -4$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{2}$

$\mathcal{S} = \{-2\}$

3. $5x - 3 = 8 + 9x$

$\Leftrightarrow 5x - 9x = 8 + 3$

$\Leftrightarrow -4x = 11$

$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{4}$

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{11}{4}\right\}$

4. $5x < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$

$\mathcal{S} =]-\infty; 0[$

5. $3x + 2 < 7x - 9$

$\Leftrightarrow 3x - 7x < -9 - 2$

$\Leftrightarrow -4x < -11$

$\Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$

$\mathcal{S} = \left]\frac{11}{4}; +\infty\right[$

Exercice 5 : manipuler les valeurs absolues **3 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes en précisant l'ensemble des solutions sous la forme d'un ensemble ou d'un intervalle.

1. $|x| = 7$

$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7$

$\mathcal{S} = \{-7; 7\}$

2. $|x - 5| = 2$

$\Leftrightarrow x - 5 = 2$ ou $-x + 5 = 2$

$\Leftrightarrow x = 2 + 5$ ou $5 - 2 = x$

$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 3$

$\mathcal{S} = \{3; 7\}$

2. $|x - 5| \geq 2$

$\Leftrightarrow x - 5 \geq 2$ ou $-x + 5 \geq 2$

$\Leftrightarrow x \geq 2 + 5$ ou $5 - 2 \geq x$

$\Leftrightarrow x \geq 7$ ou $x \leq 3$

$\mathcal{S} =]-\infty; 3] \cup [7; +\infty[$

1. Que signifie étymologiquement un nombre irrationnel ?

En latin, « ratio » signifie *compter*. Etymologiquement, un nombre irrationnel est *un nombre que l'on ne peut pas compter*.

2. Quels sont les nombres irrationnels les plus célèbres ?

Les nombres irrationnels les plus célèbres sont π et e.

3. Dans quelle civilisation trouve t-on les premières traces des nombres irrationnels ?

Pour trouver les premières traces de nombres irrationnels, il faut remonter 4000 ans en arrière jusqu'aux civilisations babyloniennes.

4. Qu'est-ce que le langage cunéiforme ?

L'écriture cunéiforme est un système d'écriture complet mis au point en Basse Mésopotamie entre 3400 et 3300 av. J.-C., qui s'est par la suite répandu dans tout le Proche-Orient ancien, avant de disparaître dans les premiers siècles de l'ère chrétienne.

5. Quel est le premier irrationnel à faire son entrée ? Préciser.

Le premier irrationnel à faire son entrée est $\sqrt{2}$ en tant que longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.

6. A quelle époque Euclide a-t-il vécu ?

Euclide d'Alexandrie a vécu au 3ème siècle avant Jésus-Christ.

7. Citez un des nombreux apports d'Euclide aux mathématiques.

Euclide d'Alexandrie (-320? ; -260?) présente une des premières démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Dans le Livre X des « Eléments », il donne une classification des irrationnels connus qui sont tous des racines carrés d'entiers.

8. Quand le symbole radical est-il apparu ?

Le symbole radical avec la barre supérieure sera utilisé en 1637 par René Descartes (1596 ; 1650)

9. Donner un exemple de fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

10. Où se trouve l'une des plus célèbres approximation du nombre π ?

Les décimales de π ont été la proie des savants depuis près de 4000 ans. Une des plus anciennes approximations de π se trouve sur le célèbre papyrus *Rhind*. Le papyrus Rhind est un célèbre papyrus de la Deuxième Période intermédiaire qui a été écrit par le scribe Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Alexander Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor, mais il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes. Depuis 1865 il est conservé au British Museum (à Londres).