Chapitre 1 : suites numériques

I. Suites géométriques

1. Reconnaître et exploiter une suite géométrique

a. Définition

Dire qu'une suite u est **géométrique** de **raison** q signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$U_{n+1} = q \times U_n$

b. formes explicites

Si une suite u est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors pour tous n et p de $\mathbb{N}$:
(1) $U_n = U_0 \times q^n$
(2) $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
(3) $U_n = U_p \times q^{n-p}$

<u>Preuve :</u>
u est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors :
$U_1 = q \times U_0$ $\quad$ $U_2 = q \times U_1 = q \times q \times U_0 = q^2 \times U_0$ $\quad$ $U_3 = q \times U_2 = q \times q^2 \times U_0 = q^3 \times U_0$
De proche en proche, on a donc $U_n = U_0 \times q^n$

En particulier on a donc $U_p = U_0 \times q^p$.

De $U_n = U_0 \times q^n$ et de $U_p = U_0 \times q^p$ on en déduit que $U_n = \dfrac{U_p}{q^p} \times q^n = U_p \times q^{n-p}$

c. reconnaître une suite géométrique

Si u est une suite telle que u est une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_n = a \times q^n$$
(avec a nombre réel), alors u est une suite géométrique de raison q.

<u>Preuve :</u>
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = a \times q^{n+1} = a \times q^n \times q = q \times U_n$, donc d'après la définition ci-dessus, u est une suite géométrique de raison q.

2. Sens de variation

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = q^n$ avec **q >0** :

si $q > 1$ alors la suite géométrique u est croissante ;
si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique u est décroissante ;
si $q = 1$ alors la suite géométrique u est constante.

<u>Remarque</u> : si q < 0 la suite est non monotone. En effet, les termes consécutifs sont alternativement positifs ou négatifs.

<u>**Preuve :**</u>

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q>0$, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$, et donc $U_{n+1} - U_n$ est du signe de $q-1$.

<u>Remarque</u> : Les suites géométriques de raison q > 0 correspondent à des **évolutions exponentielles.**

3. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

a. <u>Somme $1+q+q^2+......+q^n$</u>

Soit s_n la somme des puissances successives d'un nombre réel $q \neq 1$.

s_n s'exprime sous la forme $1+q+q^2+......+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

<u>**Preuve :**</u>

$$\begin{array}{rl} s_n = & 1+q+q^2+......+q^n \\ q \times s_n = & \quad\; q+q^2+......+q^n+q^{n+1} \\ \hline s_n - qs_n = & 1-q^{n+1} \end{array}$$

par soustraction membre à membre

$s_n(1-q) = 1-q^{n+1}$ d'où $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

<u>Remarque</u> : si $q = 1$, alors $s_n = 1+1+1^2+....+1^n = n+1$

b. Somme $U_0 + U_1 + ... + U_n$

Soit S_n la somme des termes consécutifs q'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

$S_n = (\textit{premier terme de la somme})\dfrac{1-q^{\textit{nombre de termes}}}{1-q}$

Preuve :

$$S_n = \quad U_0 + U_1 + ... + U_n$$

$$S_n = \quad U_0 + qU_0 + q^2U_0 + ... + q^nU_0$$

$$S_n = \quad U_0(1 + q + q^2 + ... + q^n) = U_0 \times s_n \text{ avec } 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

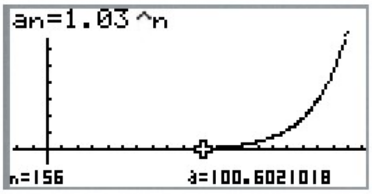
II. Limite de la suite (q^n) avec q>0

1. approche de la notion de limite

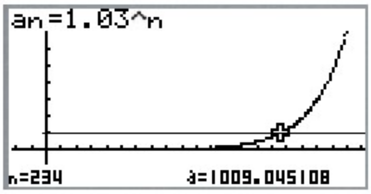
exemple 1 :

(a_n) est la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $a_n = 1,03^n$.

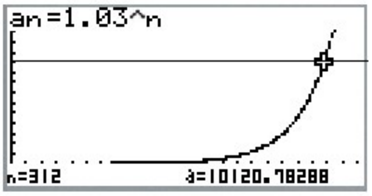
(a_n) est une suite croissante car 1,03 > 1.



Pour n $\geqslant$ 156, $a_n > 100$.



Pour n $\geqslant$ 234, $a_n > 1000$.



Pour n $\geqslant$ 312, $a_n > 10\ 000$.

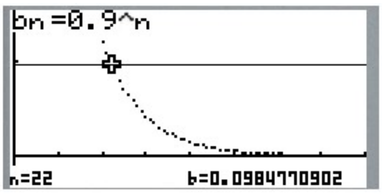
Plus généralement, on peut démontrer que, pour tout nombre réel A, aussi grand que l'on souhaite, a_n dépasse définitivement A à partir d'un certain rang.

On dit que **la suite (1,03^n) a pour limite** $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,03^n = +\infty$

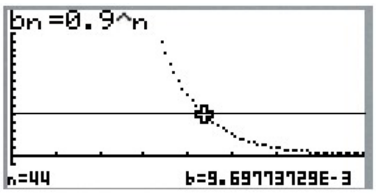
exemple 2 :

(b_n) est la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $b_n = 0,9^n$.

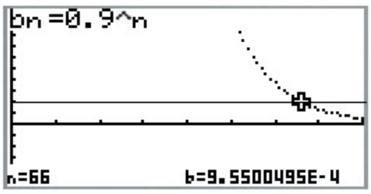
(b_n) est une suite croissante car 0,9 < 1.



Pour n $\geqslant$ 22, $0 < b_n < 0,1$



Pour n $\geqslant$ 44, $0 < b_n < 0,01$



Pour n $\geqslant$66, $0 < b_n < 0,001$

Plus généralement, on peut démontrer que, pour tout nombre réel α, aussi proche de zéro que l'on souhaite, b_n dépasse définitivement en dessous de α à partir d'un certain rang.

On dit que **la suite (0,9^n) a pour limite** 0 et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$.

2. limite de la suite (q^n)

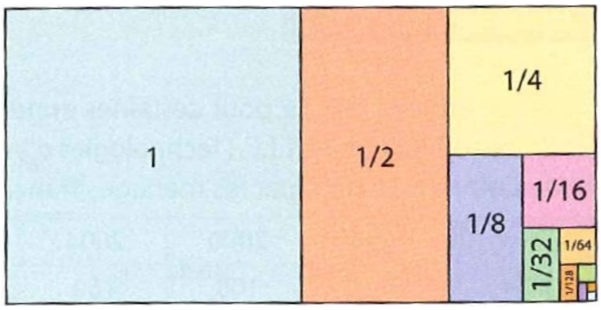
Propriété admise : q désigne un nombre réel **strictement positif**.

- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Remarque : si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

Exemple : étude de la limite de la somme $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'après la formule établie au §I.3 :



$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

donc $s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Par opérations sur les limites (différence), $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 2$

Application 1 : étudier la limite d'une suite géométrique

Etudier la limite de chacune des suites définies pour tout nombre entier naturel n par :

$a)\ U_n = -2\left(\frac{5}{4}\right)^n$ $\quad b)\ V_n = 100\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\quad c)\ W_n = 1000\text{x}1{,}01^n$

Application 2 : étudier la limite d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

u est la suite géométrique de raison 0,99 telle que u_1 =50.
On note $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Etudier la limite de S_n.

A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

III. Suites arithmético-géométriques

1. définition

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite u définie par la donnée de son premier terme et de la relation de récurrence :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = aU_n + b$, où a et b sont des nombres réels donnés.

Cas particuliers :

- si $a = 0$, u est une suite constante à partir de son terme initial.
- si $a \neq 0$, $b = 0$, pour tout n, $U_{n+1} = aU_n$ donc u est une suite géométrique de raison a.
- si $a = 1$, pour tout n, $U_{n+1} = U_n + b$ donc u est une suite arithmétique de raison b .

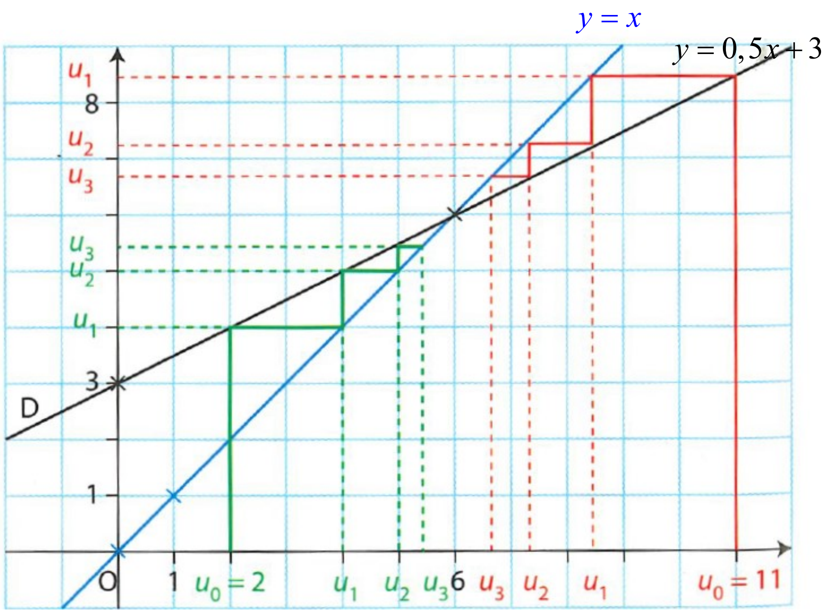
2. représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

u est une suite **arithmético-géométrique** définie par la relation de récurrence :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = aU_n + b$, où a et b sont des nombres réels donnés.
On a donc une relation de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \mapsto ax + b$

f est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b .

Exemple :
Pour tout n de $\mathbb{N}$:
$U_{n+1} = 0,5U_n + 3$
On a représenté ci-contre les premiers termes de la suite u dans chacun des cas :

- $u_0 = 2$ en vert
- $u_0 = 11$ en rouge



Un tel graphique permet d'émettre des conjectures.
Il semble que :

- lorsque $u_0 = 2$, la suite u est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 6$.
- lorsque $u_0 = 11$, la suite u est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 6$.

Méthode :

Pour représenter graphiquement une suite arithmético-géométrique :
(1) On trace la droite D d'équation $y = x$
(2) On définit la fonction $f : x \mapsto ax + b$. On trace la droite Δ d'équation $y = ax + b$.
(3) On place le premier terme sur l'axe des abscisses.
(4) $u_1 = f(u_0)$ donc on construit sur l'axe des ordonnées u_1 l'image de u_0 par f en utilisant Δ.
(5) On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite D d'équation $y = x$.
(6) On peut alors construire $u_2 = f(u_1)$ en utilisant Δ.
(7) On recommence l'étape (5).

3. Méthodes pour le baccalauréat

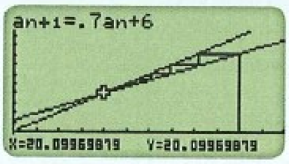
Un journal possédait 5000 abonnés en 2010. Chaque année, il perd 30% des abonnés de l'année précédente, mais regagne dans le même temps 600 nouveaux abonnés.
On note U_n le nombre d'abonnés en centaines, à l'année (2010 + n).

a. Montrer que la situation peut être modélisée par une suite arithmético-géométrique.
b. Avec la calculatrice, conjecturer la limite de la suite u.
c. On considère la suite v définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.
   i) Démontrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,7 et déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   ii) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 30 \times 0,7^n + 20$.
   iii) En déduire la limite de la suite u. Interpréter ce résultat pour la situation de l'exercice.

Solution

1. Perdre 30 % des u_n centaines d'abonnés signifie qu'il restera $\left(1-\frac{30}{100}\right)u_n$ centaines d'abonnés, c'est-à-dire $0{,}7u_n$ centaines. Mais il y aura 6 centaines d'abonnés nouveaux, donc $u_{n+1}=0{,}7u_n+6$.

2. Avec le format WEB (ou Esc) de la calculatrice, on conjecture que la suite u a pour limite 20, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y=x$ et $y=0{,}7x+6$.



- **Casio**
  MENU 8 (RECUR)
  Renseigner an+1 et SET : ici, a0 = 50 et anStrt = 50, puis EXE F6 (TAB) F4 (WEB) puis EXE, EXE…
- **TI**
  Dans mode sélectionner SUITE. Dans f(x) renseigner $u(n)$ et $u(n\text{Min})=50$. 2nde format sélectionner Esc, puis graphe trace ▶ ▶…

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-20\\&=0{,}7u_n+6-20\\&=0{,}7u_n-14\\&=0{,}7(u_n-20)\\&=0{,}7v_n\end{aligned}$$

- Pour démontrer que la suite v est géométrique, on cherche un nombre □ tel que $v_{n+1}=\square\times v_n$.
  Pour cela, on utilise uniquement les deux « outils » :
  - $u_{n+1}=0{,}7u_n+6$
  - $v_n=u_n-20$

Donc v est une suite géométrique de raison 0,7.
Or $v_0=u_0-20=50-20=30$, donc pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_n=v_0\times 0{,}7^n=30\times 0{,}7^n$$

b) Or pour tout n, $v_n=u_n-20$ soit $u_n=v_n+20$, c'est-à-dire :

$$u_n=30\times 0{,}7^n+20$$

c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 30\times 0{,}7^n=0$ car $0<0{,}7<1$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=20$.
Ainsi, le nombre d'abonnés se rapproche de 2 000 lorsque n est infiniment grand.

A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !