Chapitre 2 : calcul numérique

I. Rappel des règles de calcul

1. Fractions

$a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre nombres réels quelconques.

✓ $\frac{a}{1} = ..1..$ $\frac{a}{0}$.....$n'existe.pas$................ $\frac{0}{a} = ...0...$ pour $a \neq 0$

✓ $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$: c'est ….l'opposé…….. de $\frac{a}{b}$

✓ simplification : $\frac{c\text{x}a}{c\text{x}b} = ...\frac{a}{b}..$ en particulier $\frac{-a}{-b} = ...\frac{a}{b}....$

✓ addition : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\text{x}d}{b\text{x}d} + \frac{c\text{x}b}{d\text{x}b} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

✓ multiplication : $\frac{a}{b}$ x $\frac{c}{d} = ..\frac{a\text{x}c}{b\text{x}d}..$ en particulier a x $\frac{c}{d} = \frac{a\text{x}c}{d} = c\text{x}\frac{a}{d}$

✓ division : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = ..\frac{b}{a}...$: c'est …l'inverse….de $\frac{a}{b}$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = ..\frac{a}{b}\text{x}..\frac{d}{c}.. = ..\frac{ad}{bc}..$

✓ égalité des produits en croix : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

équivalent OU si et seulement si

2. Priorités de calcul

Dans un enchaînement d'opérations, on effectue d'abord les calculs situés dans les parenthèses les plus à l'intérieur. Par ailleurs, la multiplication et la division sont …prioritaires……sur l'addition et la soustraction.

Exemples : $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}\text{x}\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{12}{35} = \frac{35}{70} + \frac{24}{70} = \frac{35+24}{70} = \frac{59}{70}$ …….

$B = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right)\text{x}\frac{4}{5} = \left(\frac{7}{14} + \frac{6}{14}\right)\text{x}\frac{4}{5} = \frac{13}{14}\text{x}\frac{4}{5} = \frac{13}{7}\text{x}\frac{2}{5} = \frac{26}{35}$

3. Ordre sur $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dire que $a \geq 0$ revient à dire que a est …positif ou nul………

Règles :

$a,\ b,\ c$ sont trois réels.

✓ ordre et addition (ou soustraction)

Si $a < b$ alors $a + c..<..b + c$

on ne change pas le sens d'une inégalité lorsque l'on ajoute ou soustrait une même quantité dans chaque membre d'une inégalité.

Conséquence : *règle de transposition*

$$\begin{array}{l} x + a < b \iff x < b - a \ \dots \\ \quad -a \quad -a \end{array}$$

✓ ordre et multiplication (ou division)

Si $a < b$ et si $\underline{c > 0}$
Alors $ac..<..bc$

Lorsqu'on multiplie (ou divise) chaque membre d'une inégalité par une même quantité positive, on obtient une inégalité de même sens.

Si $a < b$ et si $\underline{c < 0}$
Alors $ac..>..bc$

Lorsqu'on multiplie (ou divise) chaque membre d'une inégalité par une même quantité négative, on obtient une inégalité de sens contraire.

Exemples :

si $x < y$
Alors $x - 7 < y - 7$

si $x < y$
Alors $\frac{x}{3}..<.\ \frac{y}{3}$

si $x < y$
Alors $-5x > -5y$

si $x - 3 < 7$
Alors $x < 7 + 3$

si $-11x < 4$
Alors $x > \frac{4}{-11}$

A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

LaboMEP

Séquence R3 ☐
Séquence R4 ☐

II. Puissances

1. Définition :

a est un nombre réel quelconque ; n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

✓ $a^1 = ..a..$ $\qquad a^n = ..\underbrace{a \text{x} a \text{x} a .... a}_{n \text{ facteurs}}$

✓ $a^0 = 1$

Pour $a \neq 0$:

✓ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ c'est ...l'inverse....de a^n .

✓ $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ c'est ...l'inverse....de a . Ne pas confondre avec $-a$: l'opposé.. de a .

Exemples : $C = (-3)^2 = 9$ .... $\qquad D = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$. $\qquad E = (-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$

$F = -3^2 = -9$ $\qquad G = -3^{-2} = -\dfrac{1}{3^2} = -\dfrac{1}{9}$

2. Propriétés :

a est un nombre réel quelconque ; pour tous n et p entiers naturels :

✓ $a^n \text{ x } a^p = a^{n+p}$ $\qquad (ab)^n = a^n \text{x } b^n$

✓ $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

✓ $\left(a^n\right)^p = a^{n\text{x}p}$ $\qquad a^n \text{ x } b^p$:pas de formule particulière

Remarque : ces propriétés restent vraies pour n et p réels.

Exemples : $H = 3^7 \text{x} 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$ $\qquad K = (2y)^3 = 2^3 y^3 = 8y^3$

$L = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 = \dfrac{x^3}{2^3} = \dfrac{x^3}{8} = \dfrac{1}{8}x^3$ $\qquad M = \left(x^5\right)^2 = x^{2\text{x}5} = x^{10}$

A toi de jouer ! Transmath page 24

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

Exercice n°38 ☐	Exercice n°39 ☐	Exercice n°40 ☐
Exercice n°41 ☐	Exercice n°42 ☐	

☞ Aide : LaboMEP **Séquence R6** ☐

III. Racines carrées

1. Définition :

Soit a un nombre **positif ou nul** .

$\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

On peut donc noter : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Exemples : $N = \sqrt{1} = 1$ $\quad P = \sqrt{36} = 6$ $\quad Q = \sqrt{0} = 0$

$R = \sqrt{10^{-2}} = (10^{-2})^{\frac{1}{2}} = 10^{-1}$ …. $\quad S = \sqrt{(-7)^2} = 7$

-5 n'est pas la racine carrée de 25 bien que $(-5)^2 = 25$.
-5 n'est pas un nombre positif.

2. Propriétés :

a et étant deux réels positifs :

✓ $\sqrt{a} \text{ x } \sqrt{b} = \sqrt{a\text{x}b}$ $\qquad$ ✓ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

En général, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \;..\neq..\; \sqrt{a+b}$

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ démonstration en exercice

Preuve : $\sqrt{a} \text{ x } \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \text{x } b^{\frac{1}{2}} = (a\text{x}b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a\text{x}b}$

Preuve par un contre exemple :
D'une part $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ $\qquad$ D'autre part $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

A toi de jouer ! Transmath page 24

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

Exercice n°43	☐	Exercice n°44	☐	Exercice n°45	☐
Exercice n°46	☐	Exercice n°47	☐	Exercice n°48	☐
Exercice n°49	☐	Exercice n°50	☐	Exercice n°51	☐

☞ Aide : LaboMEP **Séquence R5** ☐

IV. Valeur absolue

1. Définition :

On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel a , le nombre réel noté $|a|$ défini par **la distance** du réel a par rapport **à zéro**.

Il en résulte que :

- ✓ si $a \geq 0$ alors $|a| = a$
- ✓ si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$

Exemples :

$|3| = 3$ car $3 > 0$ $|-7| = -(-7) = +7$ car $-7 < 0$

$|0| = 0$ car $-7 < 0$ $|-4,2| = 4,2$ car $-7 < 0$

2. Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b :

- ✓ $|-a| = |a|$ $|a|^2 = |a^2|$
- ✓ $|a - b| = |b - a|$ cette différence correspond à la **distance** entre les réels a et b
- ✓ $|a|.|b| = |a.b|$
- ✓ $|a+b| \leq |a| + |b|$ …c'est l'inégalité triangulaire..(démonstration en exercice)……
- ✓ $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemples :

$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$ $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

A toi de jouer ! Transmath page 23

☞ parcours de réussite

Exercice n°21	☐	Exercice n°22	☐	Exercice n°23	☐
Exercice n°24	☐	Exercice n°25	☐	Exercice n°26	☐
Exercice n°27	☐	Exercice n°28	☐	Exercice n°29	☐

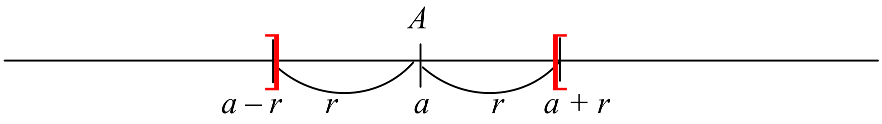
Remarque :

Dire que x est tel que $|x-a|<r$ est équivalent à x appartient à l'intervalle $]a-r;a+r[$

Preuve :

$|x-a|$ correspond à la distance entre un point M d'abscisse x et un point A d'abscisse a.

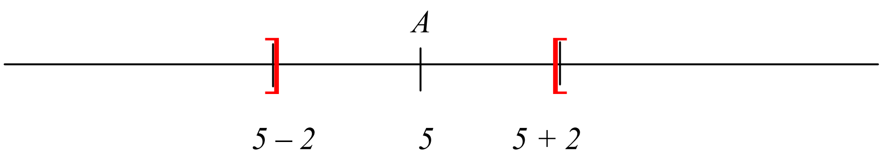
$|x-a|<r$ signifie donc que la distance AM est inférieure à r , donc le point M est situé à une distance maximale r du point A en étant situé soit à gauche du point A soit à droite du point A.



Exemple : **a)** Résolution graphique de l' inéquation $|x-5|\le 2$

Vidéo EDpuzzle 09 – valeur absolue

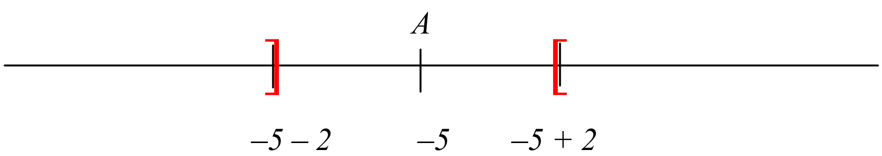
Soit $M(x)$ et $A(5)$. $|x-5|\le 2 \Leftrightarrow AM \le 2$



$\boxed{|x-5|\le 2 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[3;7]}$

Autre exemple : Résolution graphique de l' inéquation $|x+5|\le 2$

Soit $M(x)$ et $A(-5)$. $|x+5|\le 2 \Leftrightarrow |x-(-5)|\le 2 \Leftrightarrow AM \le 2$



$\boxed{|x+5|\le 2 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-7;-3]}$

b) Résolution algébrique de l' inéquation $|x-5| \leq 2$

Résoudre une équation ou une inéquation, c'est déterminer l'ensemble des réels x qui **vérifient** l'égalité ou l'inégalité.

☞ 1er cas :

Si $x-5 \geq 0$ c'est-à-dire, **si** $x \geq 5$ **alors** $|x-5| = x-5$

On a donc à résoudre : $x-5 \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 2+5$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 7$

On a donc $5 \leq x \leq 7$

$\Leftrightarrow \quad x \in [5;7]$

☞ 2ème cas :

Si $x-5 \leq 0$ c'est-à-dire, **si** $x \leq 5$ **alors** $|x-5| = -(x-5) = 5-x$

On a donc à résoudre : $5-x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad -x \leq 2-5$

$\Leftrightarrow \quad -x \leq -3$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 3$

On a donc $3 \leq x \leq 5$

$\Leftrightarrow \quad x \in [3;5]$

Conclusion : on rassemble les 2 cas possibles

$\boxed{\mathcal{S} = [3;5] \cup [5;7] = [3;7]}$

A toi de jouer ! Transmath page 23

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

Exercice n°30 ☐ Exercice n°31 ☐ Exercice n°32 ☐
Exercice n°33 ☐

3. Résolution algébrique d'équations ou d'inéquations :

Exemples et méthodes :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|-3x|=7$

$|-3x|=7$

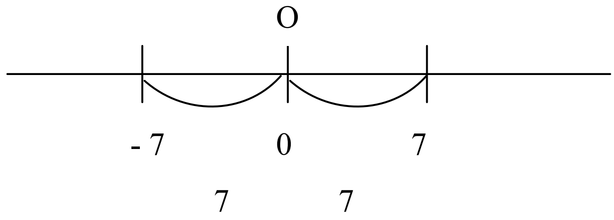
$\Leftrightarrow |0-3x|=7$

$\Leftrightarrow d(0;3x)=7$

$\Leftrightarrow 3x=7$ ou $3x=-7$

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$ ou $x=-\frac{7}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{3}\ ;-\frac{7}{3}\right\}$



b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $\left|\frac{5}{2}x\right|\leq -15$

Impossible : pour tout A , $|A|>0$

$\mathcal{S}=\varnothing$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $|x-4|=|x+6|$

$|x-4|=|x+6|$

$\Leftrightarrow |x-4|=|x-(-6)|$

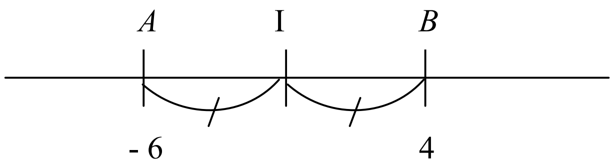
$\Leftrightarrow d(x;4)=d(x;-6)$

$\Leftrightarrow x=\frac{-6+4}{2}$

$\Leftrightarrow x=-1$

$\mathcal{S}=\{-1\}$

On cherche l'ensemble des points $M(x)$ situés à égale distance de $A(-6)$ et de $B(-4)$ sur la droite graduée : seul le point I milieu de $[AB]$ vérifie condition.



d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|x-5|\leq 6$

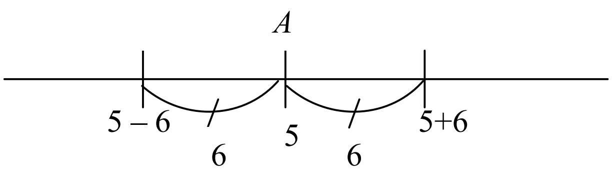
$|x-5|\leq 6$

$\Leftrightarrow d(x;5)\leq 6$

$\Leftrightarrow x\in[5-6;5+6]$

$\Leftrightarrow x\in[-1;11]$

$\mathcal{S}=[-1;11]$



e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $|x+10|\geq 3$

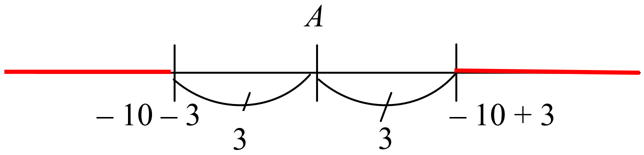
$|x+10|\geq 3$

$\Leftrightarrow d(x;-10)\geq 3$

$\Leftrightarrow x\geq -10+3$ ou $x\leq -10-3$

$\Leftrightarrow x\geq -7$ ou $x\leq -13$

$\mathcal{S}=]-\infty;-13]\cup[-7;+\infty[$



f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $|5-2x|\leq 3$

$|5-2x|\leq 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x\leq 3 \\ x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-5\leq 3 \\ x\geq \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x\leq 3-5 \\ x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x\leq 3+5 \\ x\geq \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x\leq -2 \\ x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x\leq 8 \\ x\geq \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq \frac{5}{2}$ ou $\frac{5}{2}\leq x\leq 4$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq 4$

$\mathcal{S}=[1;4]$

<u>Autre méthode :</u>

$|5-2x|\leq 3$

$\Leftrightarrow |2(\frac{5}{2}-x)|\leq 3$

$\Leftrightarrow |2|.|\frac{5}{2}-x|\leq 3$

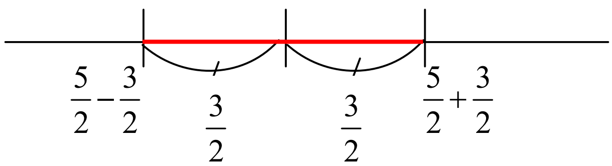
$\Leftrightarrow 2.|\frac{5}{2}-x|\leq 3$

$\Leftrightarrow |\frac{5}{2}-x|\leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow d(x;\frac{5}{2})\leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq 4$

$\mathcal{S}=[1;4]$



V. Histoire des nombres décimaux

Avant de se décimer, les nombres se sont fractionnés ! En effet les nombres décimaux sont nés des fractions vers 2500 avant J.C. chez **les égyptiens**.

Leur système de numération de base 10 est additif. Les scribes écrivent les nombres sur des papyrus sous forme de hiéroglyphes. Chaque signe possède une valeur : 1, 10, 100, … La partie décimale est écrite à l'aide de fractions unitaires (de numérateur 1).

Les égyptiens disposent également de la fraction 2/3.

Vers 1800 avant J.C., **les babyloniens** utilisent un système sexagésimal (base 60) qui repose sur la combinaison du principe de position (la valeur du symbole varie en fonction de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre) et du principe additif (la valeur d'un nombre est égale à la somme des symboles qui le compose).

Deux symboles seulement sont utilisés, **I** et **<**, pouvant prendre alternativement des valeurs entières (1, 10, 60, 3600) ou fractionnaires (1/60, 1/3600). Les nombreux diviseurs de 60 permettent de représenter également d'autres fractions unitaires telles : 1/2, 1/3, 1/4, …

Les fractions babyloniennes et égyptiennes sont nées des besoins économiques et commerciaux (taxes, intérêts, échanges monétaires, …) et ont accompagnées l'essor de la géométrie (arpentage, …).

Tablette de terre cuite portant des nombres en écriture cunéiforme

Bien que le système de numération alphabétique grec soit peu commode, les grecs apportent des progrès non négligeables à l'écriture fractionnaire (voir Histoire des fractions chez les grecs). Les Pythagoriciens se pencheront de près sur l'étude des décimaux en s'intéressant aux grandeurs commensurables dont le rapport peut s'exprimer à l'aide d'entiers.

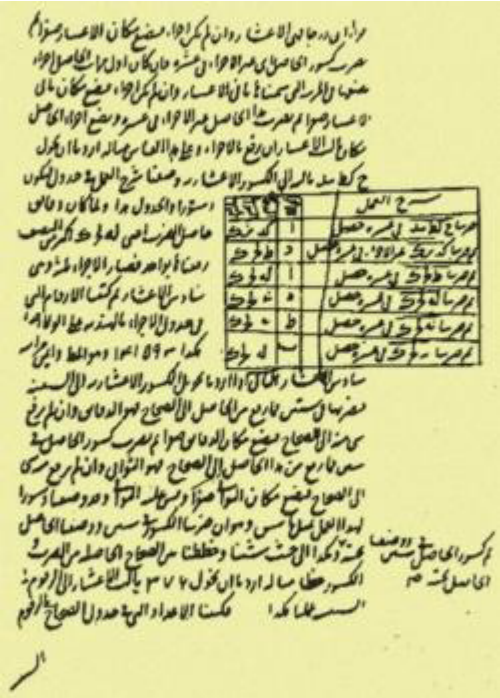
Les avancés les plus précoces vers les nombres décimaux se feront par les **savants arabes**.
Vers 952, *Ibrahim al Uqlidisi* (920 ; 980) propose d'utiliser des fractions décimales pour écrire les nombres. Le nombre 89,532 par exemple se note 89'532 .

Il explique que sa notation sans dénominateur permet d'effectuer plus rapidement les multiplications et les divisions en passant par les puissances de 10 (non encore définies comme telles). Au Xème siècle, *Muhammad al Karkhi* (953 ? ; 1029) développe les fractions décimales et pose des règles de calcul qu'il applique pour donner une approximation à la solution irrationnelle de certaines équations. Ces travaux seront poursuivis plus tard par *Yahya al Samawal* (1130 ; 1180). Mais c'est le perse ***Omar Khayyâm* (1048 ; 1123)** qui est un des premiers à accorder le statut de nombre à tout rapport de grandeurs.

Omar Khayyâm

En 1427, sans avoir pris connaissance des travaux de ses prédécesseurs, le célèbre astronome de Samarkand, Jemshid al Kashi, donne une définition des fractions décimales, expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales.

Al Kashi détaille les techniques opératoires en expliquant qu'en utilisant les fractions décimales, les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur les entiers. Il conçoit également des tableaux de conversion de fractions décimales en fractions sexagésimales antérieurement utilisées par les babyloniens.



Transformation de 8°29'44'' en 0,141592 - Al Kashi, 1554

Si les nombres décimaux tardent à venir **en occident**, c'est tout simplement parce que l'écriture décimale des nombres met du temps à s'imposer.

En 1579, François Viète (1540 ; 1603) incite l'usage des fractions décimales devant les fractions sexagésimales :

« En mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines doivent être d'un usage fréquent ou constant. »

C'est au belge Simon Stevin (1548 ; 1620) qu'on attribue la découverte des nombres décimaux et ceci pour deux raisons essentielles.

D'abord parce qu'il semble que *Stevin* ait conçu sa théorie indépendamment des travaux antérieurs réalisés par les savants arabes. Ensuite parce que le système de *Stevin* s'est répandu de façon très rapide et a été adopté en une dizaine d'année.

L'ouvrage de référence s'intitule « La Disme ». *Stevin* l'a écrit en 1585 sous la forme d'une petite brochure de trente-six pages.

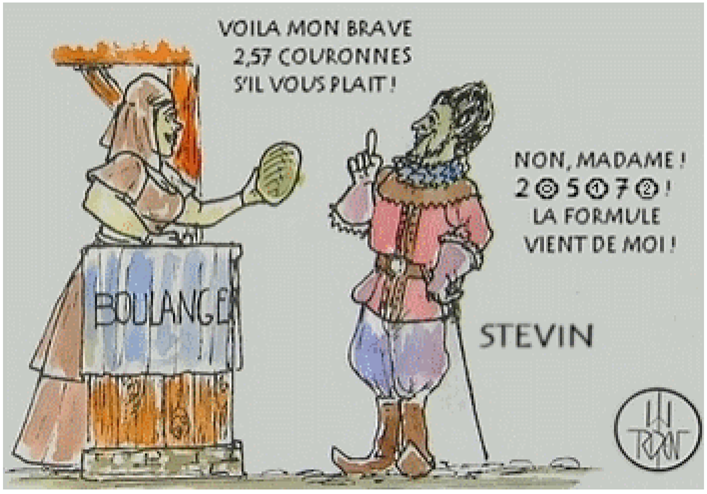
Il note par exemple le nombre 89,532 :

89⓪5①3②2③

L'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers.

Une addition se pose de la manière suivante :

⓪	①	②	③
32	5	5	4
21	7	8	2
54	3	3	6



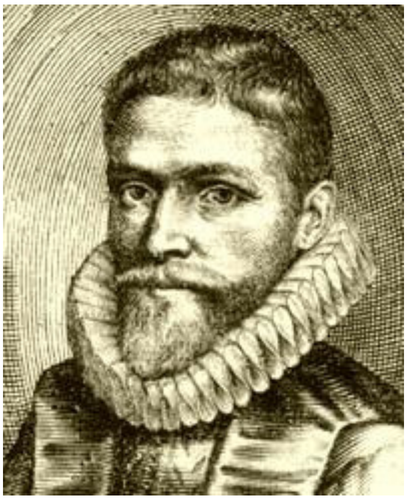
En 1592, un italien, *Giovanni Antonio Magini* (1555 ; 1617), propose une notation proche de la notre et qui est encore utilisée dans les pays anglo-saxons : 89.532

En 1595, le suisse *Jost Bürgi* (1552 ; 1632) fait surmonter le chiffre des unités par un petit rond : $\overset{\circ}{89}532$

C'est au début du XVIIème siècle que le néerlandais *Willebrord van Roijen Snell* (1580 ; 1626), aussi connu sous le nom de *Snellius*, puis l'écossais John Napier (1550 ; 1617) utilisent la virgule dans l'écriture des nombres décimaux.

Quelques liens traitant du sujet :

- Université de Palerme Petit historique des nombres décimaux
- histoire de chiffres
- **Bibliographie**



Snellius