Exercice

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0;10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.
   b) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

PARTIE C

On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.
La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x^2 + 21x + 320}{x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;10]$ et on appelle f' sa fonction dérivée.

1. Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2 + 20x + 80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;10]$.
3. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice?