Chapitre 2 : continuité – sens de variation

I. Rappels sur la dérivation

1. Nombre dérivé, fonction dérivée

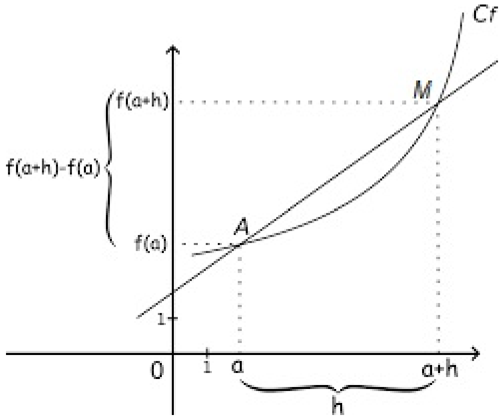
a. Définition : nombre dérivé

a et $a+h$ désignent deux nombres réels d'un intervalle I avec $h \neq 0$.
Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction

$$x \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet un nombre réel pour limite en 0.
Ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Remarque :
Soit A le point d'abscisse a sur la courbe représentative de f. Son ordonnée est donc $f(a)$.
Le point M est le point d'abscisse $a+h$ sur la courbe représentative de f. Son ordonnée est donc $f(a+h)$.



Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ et correspond donc au coefficient directeur de la droite (AM).

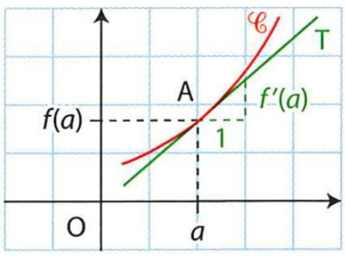
b. Définition : fonction dérivée

Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout nombre réel x de I.
La fonction dérivée de f, notée f' est la fonction qui à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

2. Tangente à la courbe d'une fonction

a. Définition :

f est une fonction dérivable en un réel a de I.
Dans un repère, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, au point A d'abscisse a est la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



b. Propriété :

Une équation de T est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Preuve :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$. m est le coefficient directeur ; p est l'ordonnée à l'origine.

Le coefficient directeur de la droite T est $m = f'(a)$.

L'équation réduite de T est donc de la forme :
$y = f'(a)x + p$.

Déterminons p à l'aide d'un point.
$A(a, f(a)) \in T$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = f'(a)x + p$

Il vient : $f(a) = f'(a)a + p$
D'où : $p = f(a) - f'(a)a$

L'équation réduite de T est donc :

$$y = f'(a)x + p = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a) \blacksquare$$

3. Sens de variation et extremum local

a. Propriétés : sens de variation et signe du nombre dérivé

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout nombre réel x de I , $f'(x) > 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si pour tout nombre réel x de I , $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I .
- Si pour tout nombre réel x de I , $f'(x) < 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est **strictement décroissante** sur I .

Phrase méthode :

Les variations de f sur I se déduisent du signe du signe de sa dérivée f' sur I .

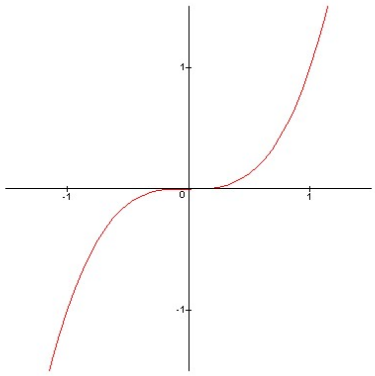
b. Propriété :

> f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 est un nombre réel de I.
> Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0)=0$.

Remarque : La réciproque est fausse.

En effet, si $f(x)=x^3$ alors $f'(x)=3x^2$.
On a $f'(0)=0$ pourtant f n'admet pas un extremum en 0.

$f'(0)=0$ signifie en revanche que $\mathscr{C}_f$ admet en 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



c. Propriété : extremum et signe du nombre dérivé

> f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 est un nombre réel de I.
>
> Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	↘	$f(x_0)$	↗

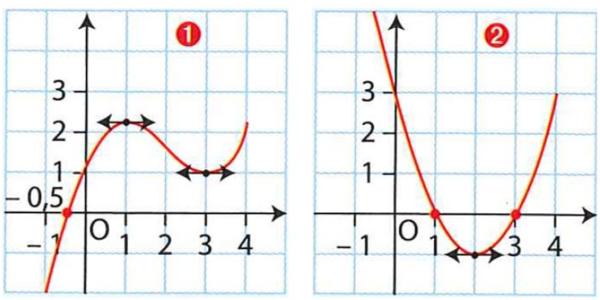
$f(x_0)$ est un minimum local

x		x_0	
f'	$+$	0	$-$
f	↗	$f(x_0)$	↘

$f(x_0)$ est un maximum local

Méthodes pour le baccalauréat : associer graphiquement une fonction et sa dérivée

Ces courbes représentent une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$ et sa dérivée f'.



Laquelle représente f et laquelle représente f' ?

▪ <u>Solution :</u>

Les variations de f sur $[-1;4]$ se déduisent du signe du signe de sa dérivée f' sur $[-1;4]$.

Dressons le tableau de signes de la fonction représentée par la courbe②.

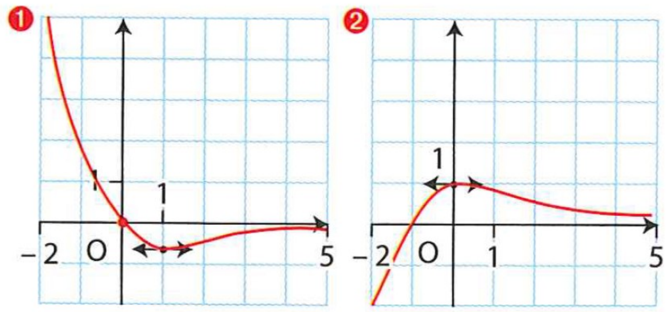
x	-1		1		3		4
signe de la fonction		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dressons le tableau de variation de la fonction représentée par la courbe ①.

x	-1		1		3		4
variations de la fonction		↗		↘		↗	
signe de sa fonction dérivée		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc la courbe du graphique ② représente f'.

Exercice :
Ces courbes représentent une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$ et sa dérivée f'. Laquelle représente f et laquelle représente f' ?



A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

4. dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur l'intervalle
$ax+b$	a	$]-\infty\,;+\infty[$
x^2	$2x$	$]-\infty\,;+\infty[$
x^n $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$	nx^{n-1}	$]-\infty\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

5. opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.
- La fonction ku avec k un nombre réel est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$
- La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$
- La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$
- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)'=nu^{n-1}\ u'$
- Si pour tout nombre réel x de I $v(x)\neq 0$

  — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

  — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Conséquence :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Exemple 1 :

f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-3x+1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x)=5\times 2x-3\times 1+0=10x-3$

Exemple 2 : rédaction type.

f est la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $u:x\mapsto x-4$ $\qquad u':x\mapsto 1$

$v:x\mapsto x^2+1$ $\qquad v':x\mapsto 2x$

$$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Pour tout réel x , $f'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-2x(x-4)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2+8x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+8x+1}{(x^2+1)^2}$

Etude des variations de f sur $\mathbb{R}$:

Les variations de f sur $\mathbb{R}$ se déduisent du signe de sa dérivée f' sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $(x^2+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $-x^2+8x+1$.

Calculons les racines de $f'(x)$.
Le discriminant du numérateur est $\Delta = (8)^2 - 4(-1)(1) = 68$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = \sqrt{68} = \sqrt{4x17} = \sqrt{4}x\sqrt{17} = 2\sqrt{17}$

Les racines de $f'(x)$ sont donc :
$x_1 = \dfrac{8+2\sqrt{17}}{-2} = -4-\sqrt{17}$ et $x_2 = -4+\sqrt{17}$

D'où le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{17}$		$-4+\sqrt{17}$		$+\infty$
signe de f '		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		↘		↗		↘	

Méthodes pour le baccalauréat : déterminer l'expression d'une fonction

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ où a et b désignent des nombres réels.
Dans un repère, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f admet une tangente T de coefficient directeur 3 au point $A(1;4)$.
Déterminer a et b .

▪ <u>Solution :</u>

$\mathscr{C}_f$ passe par $A(1;4)$ donc $f(1) = 4$.
Or $f(1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a+b+3 = 4$
$\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow \quad a+b \;\; = 1$
Le coefficient directeur de T au point A d'abscisse 1 est 3 donc $f'(1) = 3$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2a+b = 3$

a et b vérifient donc le système :

$$\begin{cases} a+b & =1 \quad (L1) \\ 2a+b & =3 \quad (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & =1 \quad (L1) \\ a & =2 \quad (L2)-(L1) \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} b & =1-2=-1 \\ a & =2 \end{cases}$ Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$

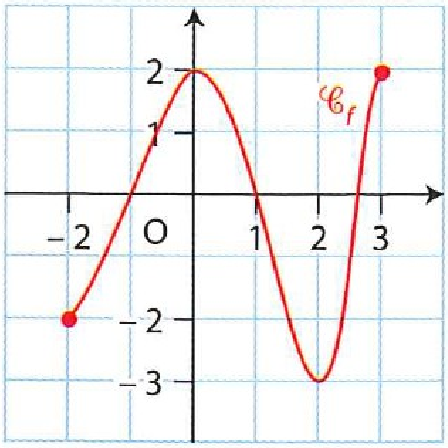
II. Langage de la continuité

1. Continuité sur un intervalle

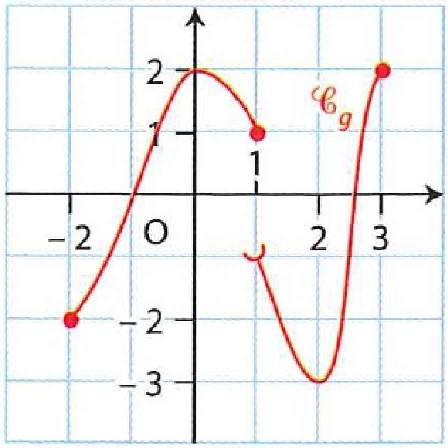
a. Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe $\mathscr{C}$ sans lever le crayon.

Exemple :



La fonction f représentée ci-dessus est continue sur [– 2 ; 3]



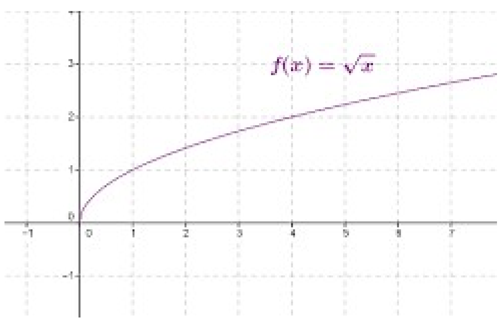
La fonction g représentée ci-dessus n'est pas continue sur [– 2 ; 3]

b. Propriété :

Propriété admise : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Remarque : La réciproque est fausse.

En effet, on considère $f(x)=\sqrt{x}$.
On peut tracer la courbe de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0;+\infty[$ pourtant cette fonction n'est pas dérivable en 0. $\mathscr{C}_f$ admet en 0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.



2. Continuité des fonctions usuelles

Propriété admise : Les fonctions construites par opérations sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition. C'est en particulier le cas es fonctions rationnelles.

Exercice :

f est la fonction définie sur l'intervalle [– 2 ; 3] par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + p & \text{si } x \in [-2;1[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1;3] \end{cases}$$

Déterminer le nombre réel p afin que la fonction f soit continue sur l'intervalle [– 2 ; 3].

▪ **Solution :**

f est continue sur l'intervalle [– 2 ; 1[et sur [1 ;3].

Si f est continue en 1 alors f est continue sur l'intervalle [– 2 ; 3].
Réciproquement, pour que f soit continue sur l'intervalle [– 2 ; 3] il faut que soit continue en 1.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

pour $x = 1$ l'expression $-x^2 + p$ est égale à $-1 + p$.

Pour que f soit continue en 1, il faut que $-1 + p = f(1)$

Soit : $-1 + p = 1$, ce qui donne $p = 2$.

A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !

III. Propriété des valeurs intermédiaires

1. Propriété fondamentale des fonctions continues

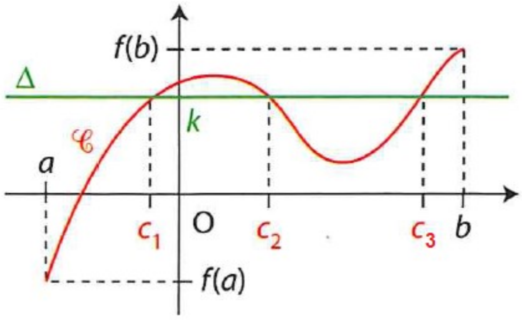
Propriété admise :
f est une fonction **continue** sur un intervalle I.
a et b désignent 2 nombres réels de I.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Remarque :

Cela signifie que lorsque x varie entre a et b avec $a<b$ et si f est continue sur $[a;b]$, alors $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Interprétation graphique :

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite Δ d'équation $y=k$ coupe au moins une fois $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.

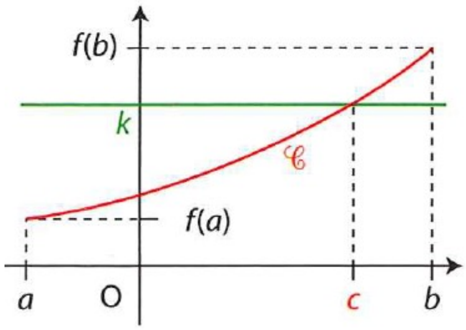


Interprétation en terme d'équation :

f est une fonction continue sur un intervalle I.
a et b sont deux réel de I.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution c comprise entre a et b.

2. Corollaire : cas d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété admise :
Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a;b]$.



3. Conventions sur les tableaux de variation

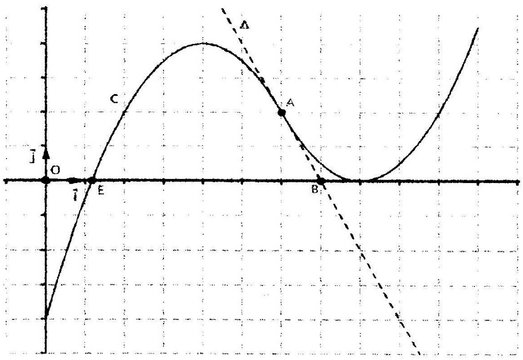
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple :

Le tableau de variation ci-contre permet d'affirmer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a;b]$.

x	a		c		b
f	$f(a)$	↗	k	↗	$f(b)$

Méthodes pour le baccalauréat : rédiger avec le corollaire du TVI



On considère une fonction définie et dérivable sur $I=[0;11]$.
Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre. Elle passe par les points $A(6;2)$ et $E(1,2\,;0)$.
La tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite Δ qui passe par le point $B(7;0)$.

Par lecture graphique :

a. Dresser le tableau de variation de f. Indiquer le signe de $f'(x)$ sur I.

b. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$.

▪ **Solution :**

a. Le signe de f' sur [0 ;11] se déduit des variations de f sur [0 ;11].

x	0		α		4		8		11
$f(x)$	-4	↗	2	↗	4	↘	0	↗	4,5
$f'(x)$		+			0	–	0	+	

b. Démontrons que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution dans $[0\,;11]$

f est continue et strictement croissante sur $[0\,;4]$ à valeurs dans $[f(0);f(4)]=[-4;4]$.

$-2 \in [f(0);f(4)]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=-2$ admet une unique solution α dans $[0\,;4]$.

Sur [4 ;11] f est continue à valeurs dans [0 ;4,5].
$-2 \notin [0;4{,}5]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=-2$ n'admet aucune solution dans [4 ;11].

Conclusion : $f(x)=-2$ admet une unique solution dans [0 ;11].

A toi de jouer !

☞ parcours de réussite : coche les exercices que tu as faits !