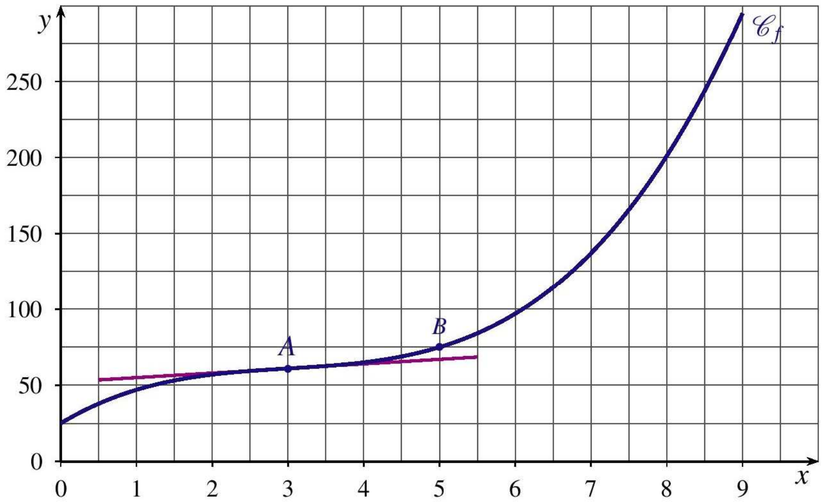
EXERCICE 1

La capacité de production mensuelle d'une entreprise est limitée à 9 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le coût total de production $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;61)$ est tracée sur le graphique.
La tangente au point $B(5;75)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.

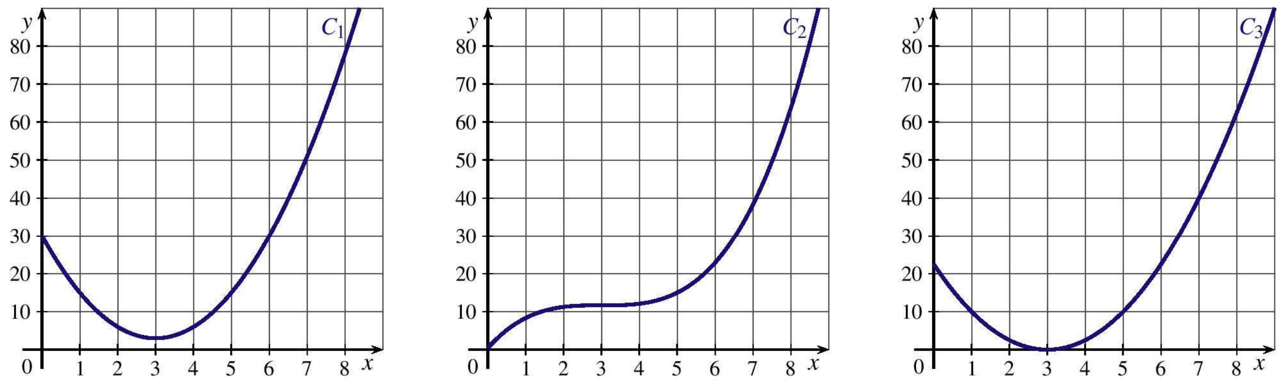


On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;9]$ et, on note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

PARTIE A

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;9]$ à la dérivée du coût total de production.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?



PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?

PARTIE C

Le prix de vente d'un article est de 30 €. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise pour x milliers d'articles vendus est donné par $B(x) = 30x - f(x)$.

1. Pour quelle quantité d'articles vendus, le bénéfice est-il maximal ?
2. Déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.

EXERCICE 2

Usines, bureaux, commerces, hôtels, etc. : les établissements constituent le tissu productif d'un territoire.
En France, entre les 1^er^ janvier 2008 et 2013, le nombre d'établissements est passé de 3,5 millions à 4,2 millions dans les activités marchandes hors agriculture.
Cette croissance s'accompagne d'un important renouvellement des établissements sous forme d'entrées et de sorties du tissu productif.

MODÉLISATION

On estime que chaque année, sur la période entre les 1er janvier 2008 et 2013 :

— le taux de sortie annuel moyen des établissements par le biais de cessations d'activités et transferts géographiques (déménagements) est de 17,5 % ;

— le nombre d'entrées annuel par le biais de créations d'entreprises, de reprises ou de transferts (emménagements) est de 812 000 établissements.

L'évolution nombre d'établissements est modélisée par la suite (u_n) où le terme u_n est le nombre, **en millions**, d'établissements le 1er janvier de l'année $(2008+n)$. Ainsi, $u_0 = 3{,}5$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}825 \times u_n + 0{,}812$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4{,}64$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4{,}64 - 1{,}14 \times 0{,}825^n$.
3. Ce modèle permet-il d'obtenir une estimation fiable (approchée à moins de 0,01 million près) du nombre d'établissements en France, au 1er janvier 2013 ?
4. En admettant que ce modèle reste valable pour les années suivantes :
   a) Est-il possible d'envisager qu'en France, le nombre d'établissements atteigne 5 millions ?
   b) On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'établissements sera supérieur à 4,5 millions.
   Parmi les trois algorithmes suivants, déterminer celui qui convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 3,5
Tant que $U \leqslant 4{,}5$
    $U \leftarrow 4{,}64 - 1{,}14 \times 0{,}825^n$
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2008$
Afficher n

Algorithme 2

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 3,5
Tant que $U \leqslant 4{,}5$
    $U \leftarrow 0{,}825 \times U + 0{,}812$
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2008$
Afficher n

Algorithme 3

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 3,5
Tant que $U > 4{,}5$
    $U \leftarrow 0{,}825 \times U + 0{,}812$
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2008$
Afficher n