Correction du DST n°1

Exercice 1

PARTIE A

1. $f'(5)$ correspond au coefficient directeur correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse 5. La tangente en $B(5;75)$ passe par l'origine du repère.

$$f'(5) = \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} = \frac{75}{5} = 15$$

$\boxed{\text{Le coût marginal pour } x = 5 \text{ est } f'(5) = 15}$

2. La courbe traverse sa tangente en $A(3;61)$ donc la fonction change de convexité pour $x = 3$

En tout point d'abscisse inférieure à 3 la tangente à la courbe semble située au dessus de la courbe.
On peut donc conjecturer que la fonction f est concave sur [0 ;3] puis convexe sur [3 ; 9].
Or les variations de la fonction f' se déduisent de la convexité de la fonction f. Donc f' est décroissante sur [0 ;3] et croissante sur [3 ; 9].
La courbe 2 peut donc être écartée. On a par ailleurs établi que $f'(5) = 15$, donc la courbe 3 est écartée à son tour.

$\boxed{\text{Parmi les 3 courbes proposées, } C_1 \text{ représente le coût marginal.}}$

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de [0 ;9] par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.
f est une fonction polynôme donc est deux fois dérivable sur son ensemble de définition.

1. Pour tout $x \in$ [0 ;9], on a $f'(x) = 3x^2 - 18x + 30$

2. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée f'.
Le discriminant du polynôme du second degré $3x^2 - 18x + 30$ est : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 3 \times 30 < 0$.

Pour tout réel x de l'intervalle [0 ;9], $f'(x)$ >0 donc la fonction f est strictement croissante sur [0 ;9].

3a. La convexité de la fonction f sur [0 ;9] se déduit du signe de sa dérivée seconde définie sur l'intervalle [0 ;9] par :

$$f''(x) = 6x - 18 \;;$$

x	0		3		9
$6x - 18$		$-$	0	$+$	

f est concave sur [0 ;3] et convexe sur [3 ;9].

3b. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour x =3 donc le point $A(3;61)$ est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

PARTIE C

1. Pour tout $x \in [0\ ;9]$, $B(x) = 30x - f(x)$

Les variations de la fonction B se déduisent du signe de sa dérivée B'.

B est dérivable par différence de fonctions dérivables.

$$
\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in [0\ ;9],\ B'(x) &= 30 - f'(x) \\
&= 30 - (3x^2 - 18x + 30) \\
&= -3x^2 + 18x \\
&= 3x(-x + 6) \ \text{ du signe de } (-x + 6) \text{ sur } [0\ ;9]
\end{aligned}
$$

x	0		6		9
$B'(x)$		+	0	$-$	
$B(x)$	-25	$\nearrow$	83	$\searrow$	-25

Le bénéfice maximal est obtenu pour la production et la vente de 6000 articles.

2. La fonction B est dérivable donc continue sur chacun des intervalles où la fonction est monotone.

En particulier B est continue et strictement croissante sur [0 ;6] à valeurs dans $[B(0);B(6)] = [-25;83]$; or $0 \in [B(0);B(6)]$.

De plus, B est continue et strictement décroissante sur [6 ;96] à valeurs dans $[B(9);B(6)]=[-25;83]$; or $0\in[B(9);B(6)]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x)=0$ admet une solution unique sur chacun de ces intervalles : $x_1\in[0;6]$ et $x_2\in[6;9]$

x	0	x_1	6	x_2	9
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	-25	0	83	0	-25

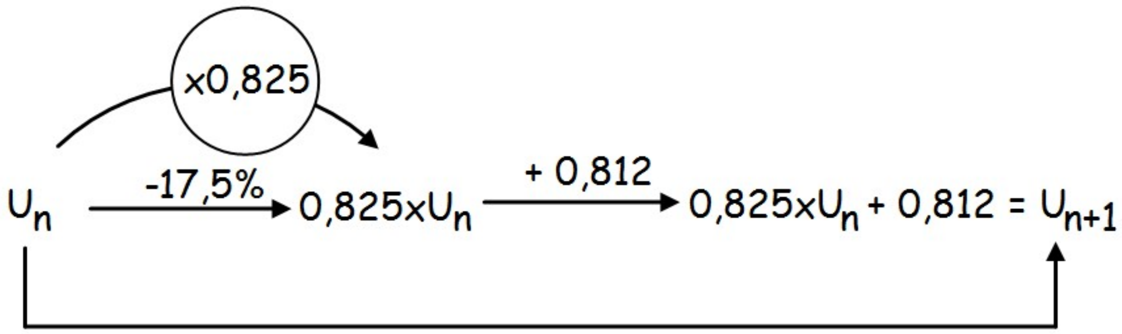
D'après le tableau de variations, $B(x)\geq 0 \iff x\in[x_1;x_2]$.
A l'aide de la calculatrice, on trouve $x_1\approx 1{,}873$ $x_2\approx 8{,}667$.

L'entreprise réalise un bénéfice entre 1900 et 8600 articles dans le mois.

Exercice 2

1. Diminuer de 17,5% revient à multiplier par $1+\left(\dfrac{-17{,}5}{100}\right)=0{,}825$.

   Le nombre d'entrées est donc multiplié par 0,825 d'une année à l'autre. On assiste par ailleurs à création de 812 000 entreprises, soit 0,812 millions d'entreprises de plus.
   Soit (Un) le nombre exprimé en millions d'entreprises une année donnée. D'une année à l'autre, la situation peut être représentée par le schéma suivant :



Pour tout entier n, on a donc $u_{n+1}=0{,}825u_n+0{,}812$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = u_n - 4,64$$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(v_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4,64 \\ &= (0,825u_n + 0,812) - 4,64 \\ &= 0,825v_n - 3,828 \\ &= 0,825(v_n + 4,64) - 3,828 \\ &= 0,825v_n \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,825et de premier terme $v_0 = u_0 - 4,64 = -1,14$.

On peut donc donner la forme explicite de la suite.

b. (v_n) est une suite géométrique de raison 0,825et de premier terme $v_0 = -1,14$, donc pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n = -1,14 \times 0,825^n$$

On a de plus :

Pour tout entier naturel n $u_n = v_n + 4,64 = 4,64 - 1,14 \times 0,825^n$

3. Selon le modèle proposé, le nombre d'établissements en 2013 correspondrait à :
$u_5 = 4,64 - 1,14 \times 0,825^5 \approx 4,20$
Le modèle semble donc fiable par rapport à la donnée de l'énoncé établissant à 4,2 millions le nombre d'établissements dans les activités marchandes hors agriculture en 2013.

4. a. Calculons la limite de la suite (u_n).

$-1 < 0,825 < 1$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,825^n = 0$ par produit, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,14 \times 0,825^n = 1,14 \times 0 = 0$.

Par différence : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 4,64 - 1,14 \times 0,825^n = 4,64 - 0 = 4,64$

Etude du sens de variation de la suite (u_n)

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4,64 - 1,14\times 0,825^n - (4,64 - 1,14\times 0,825^{n+1}) \\ &= 1,14\text{x}0,825^n - 1,14\text{x}0,825^{n+1} \\ &= 1,14\text{x}0,825^n (1 - 0,825) \\ &= 1,14\text{x}0,825^n \text{ x}0,175 > 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante mais sa limite étant strictement inférieure à 5, il est inenvisageable d'atteindre les 5 millions d'entreprises.

b. Dans le premier algorithme l'incrémentation de n est mal placée (cette remarque figure dans le cours !).
Explication : on entre dans la boucle tant que avec $n = 0$ et $U = 3,5$.
Le premier passage dans la boucle met U à U_0 et n à 1.Il y a donc un décalage entre la valeur de n et le rang du terme de la suite ainsi calculé.
Il aurait fallu incrémenter n avant de modifier la valeur de la variable U.

Dans le troisième algorithme, la condition de la boucle *Tant que* est fausse. D'ailleurs on ne rentre jamais dans la boucle puisque U est initialisé à 3,5.

C'est l'algorithme 2 qui convient.