Probabilités conditionnelles

Dans tout le chapitre, E désigne l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est appelé l'univers.

I. Probabilité conditionnelle

1. Un exemple pour comprendre

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.

On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :
- A : l'événement : « le bonbon choisi est acidulé »
- G : l'événement : « le bonbon choisi est à la guimauve »
- F : l'événement : « le bonbon choisi est à la fraise »
- O : l'événement : « le bonbon choisi est au parfum orange »

E est l'ensemble de tous les bonbons.

On a $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'elements de A}}{\text{nombre d'elements de E}} = \dfrac{40}{100} = 0,4$ et $P(G) = \dfrac{60}{100} = 0,6$

L'événement : « le bonbon choisi est à la guimauve et au parfum orange » se note $G \cap O$.

$P(G \cap O) = \dfrac{\text{nombre d'elements de } G \cap O}{\text{nombre d'elements de E}} = \dfrac{18}{100} = 0,18$ et $P(A \cap O) = 0,1$

Supposons maintenant la condition suivante réalisée : « le bonbon choisi est à la guimauve »
Quelle est alors la probabilité que le bonbon choisi soit au parfum orange ?
Cette probabilité se note $P_G(O)$. C'est la probabilité que l'événement O se réalise sachant que l'événement G est réalisé. Ici l'ensemble de référence n'est plus E mais l'ensemble des bonbons à la guimauve.

Parmi les 60 bonbons à la guimauve, 18 sont à l'orange. . Ces 18 bonbons sont donc à la guimauve et à l'orange. La probabilité d'avoir un bonbon à l'orange sachant que c'est une guimauve est donc $\dfrac{18}{60}$.

Ainsi :
$P_G(O) = \dfrac{\text{nombre d'elements de } G \cap O}{\text{nombre d'elements de G}} = \dfrac{18}{60} = 0,3$

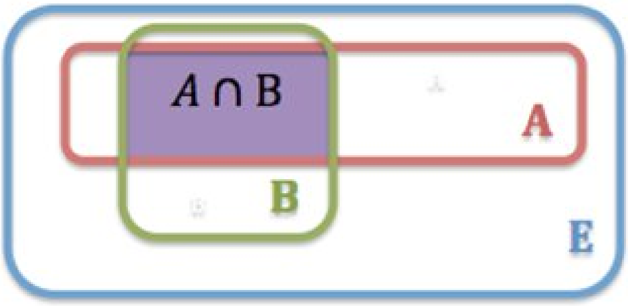
Parmi les 60 bonbons à la guimauve, 42 sont à la fraise. Ces 42 bonbons sont donc à la guimauve et à la fraise, et la probabilité d'avoir un bonbon à la fraise sachant que c'est une guimauve est donc $\dfrac{42}{60}$

On a aussi $P_G(F) = \dfrac{\text{nombre d'elements de } G \cap F}{\text{nombre d'elements de G}} = \dfrac{42}{60} = 0,7$

2. Définition

Définition : soient A et B deux événements de E, avec $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A (probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé) est le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



L'ensemble de référence n'est plus l'univers E mais devient l'événement A.

On étudie B parmi A, c'est-à-dire $A \cap B$ dans A.

Ainsi, $P_A(B) \neq P(B)$

Il s'agit d'une nouvelle probabilité, dite **probabilité conditionnelle** définie sur l'univers E.
Elle a toutes les propriétés d'une probabilité.

• **Propriété 1 :**

- ✓ $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- ✓ $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ où $\bar{B}$ est l'événement contraire de B.

3. Application à l'exemple

$P_G(O) = \frac{P(G \cap O)}{P(G)} = \frac{0{,}18}{0{,}60} = 0{,}3$ et $P_G(F) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{60-18}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{0{,}42}{0{,}60} = 0{,}7$

$P_G(O) + P_G(F) = 0{,}3 + 0{,}7 = 1$

remarque : F est l'événement contraire de O ; en effet, si un bonbon n'est pas au parfum orange, il est à la fraise : $\bar{O} = F$.

De la définition, on déduit la propriété suivante :

• **Propriété 2 :**

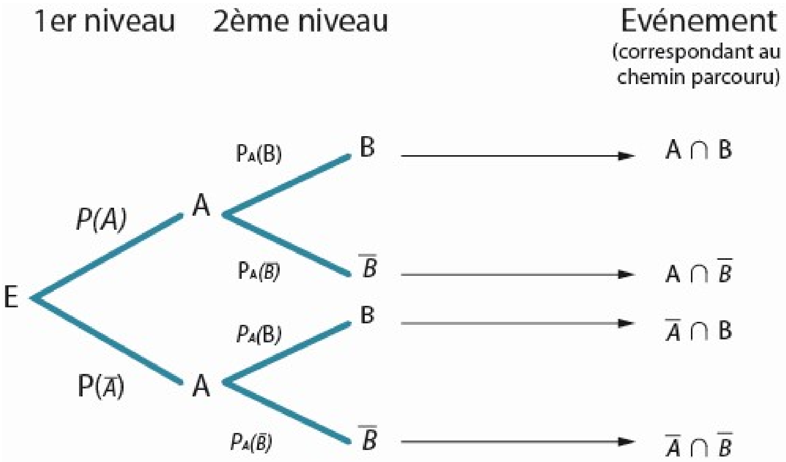
$P(A \cap B)$ peut se calculer de deux façons :

(1) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ (avec $P(A) \neq 0$)
(2) $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ (avec $P(B) \neq 0$)

II. Arbre pondéré et formule des probabilités totales

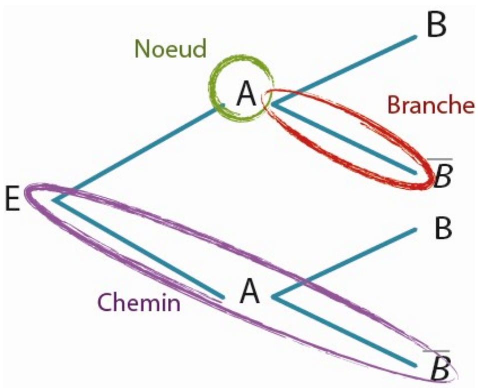
1. Arbre pondéré

Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers E, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré. Pour cela, on peut envisager deux niveaux de branches : un premier niveau qui indique la probabilité simple de l'événement A, puis un second niveau qui permet de figurer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement A.



Une **branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante :
la **probabilité de la branche** reliant A à B est $P_A(B)$.
Un **chemin** est une suite de branches ; il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
La **probabilité d'un chemin** correspond à la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin , et est égale au produit des probabilités portées par les branches formant le chemin.

Un **nœud** est le point de départ d'une ou plusieurs branches.



2. Règles

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 (Propriété P_1).
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin (Propriété P_2).

Formule des probabilités totales (Formule de Bayes)
La probabilité d'un événement est égale la somme des probabilités des chemins conduisant à l'événement.

3. Exemples d'application de la formule des probabilités totales :

• **Exemple 1 :** la probabilité de choisir un bonbon au parfum à l'orange est :

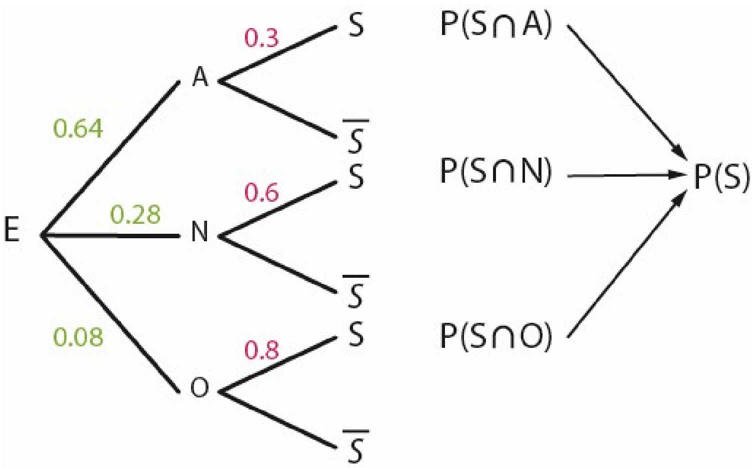
$P(O) = P(G \cap O) + P(A \cap O)$

$P(O) = P_G(O) \times P(G) + P_A(O) \times P(A)$

$P(O) = 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}60 = 0{,}33$

• **Exemple 2 :** un magasin de sport propose des réductions sur les trois marques de vêtements qu'il distribue. La marque A représente 64 % des vêtements vendus ; la marque N, 28 % ; la marque O en représente 8 %.
30 % des vêtements de la marque A, 60 % de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés.
On interroge au hasard un client ayant acheté un vêtement de sport.

La probabilité que le client interrogé ait acheté un vêtement soldé est :



3 issues réalisent S : $S = \{S \cap A ; S \cap N ; S \cap O\}$

D'après la formule des probabilités totales (ou formule de Bayes) :
$S = p(S \cap A) + p(S \cap N) + p(S \cap O)$
$P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_N(S) \times P(N) + P_O(S) \times P(O)$

$P(S) = 0{,}30 \times 0{,}64 + 0{,}60 \times 0{,}28 + 0{,}80 \times 0{,}08 = 0{,}424$

4. Evénements indépendants :

soient A et B deux événements non impossibles de E,
A et B sont dits indépendants si et seulement si

- la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre
- $p_B(A) = p(A)$
- $p_A(B) = p(B)$
- $p\ (A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Preuve : $p_B(A) = p(A)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{p\ (A \cap B)}{p(B)} = p(A)$

- $\Leftrightarrow \quad p\ (A \cap B) \times 1 = p(A) \times p(B)$ (égalité des produits en croix)

Exemple : exercice type bac en classe

III Loi binomiale

1. Épreuve de BERNOULLI

Définition : on appelle *épreuve de* BERNOULLI de paramètre *p* toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle généralement, pour l'une, *succès*, notée *S*, et, pour l'autre, *échec*, notée $\overline{S}$, et telle que *p*(*S*) = *p*.

Exemple : On lance un 2 dés à 6 faces, en on note la somme des deux chiffres obtenus sur la face supérieure de chacun des deux dés.
On considère l'événement *S* : « la somme obtenue est égale à 5 ».

On a *p*(*S*) = ….

Cette expérience comporte 2 issues, « succès » et « échec » . Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* =

2. Schema de BERNOULLI

Définition : on appelle *schéma de* BERNOULLI de paramètres *n* et *p* la répétition à *n* reprises, de façon identiques et indépendante, d'une même épreuve de BERNOULLI de paramètre *p*.

Exemple : On répète 4 fois l'expérience consistant à lancer 2 dés à 6 faces, puis à noter la somme des deux chiffres obtenus sur la face supérieure de chacun des deux dés.
On considère l'événement *S* : « la somme obtenue est égale à 5 » considéré comme succès.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur les 36 issues équiprobables, 4 réalisent l'événement *S* : « la somme obtenue est égale à 5 »

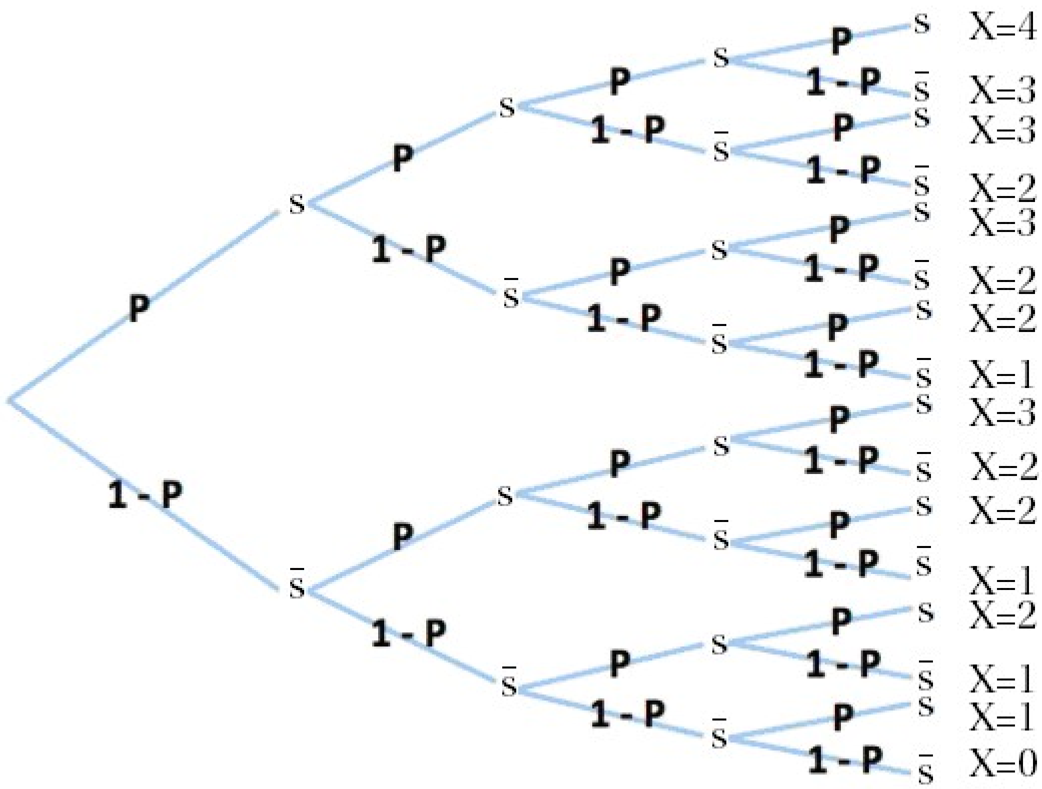
$$p(S) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

On désigne par *X* la variable aléatoire qui à l'issue de l'expérience fournit le nombre de succès obtenus. l'événement *S* : « la somme obtenue est égale à 5 ».

On répète 4 fois de façon identique et indépendante l'expérience qui consiste à lancer 2 dés et à noter la somme des 2 chiffres obtenus, avec à chaque épreuve une probabilité *p*(succès)= que la somme obtenue soit égale à 5.

X suit donc une loi binomiale de paramètres …$n = 4$…et …$p = \frac{4}{9}$ ………………………..

On peut noter : … $X \sim B\left(4;\frac{4}{9}\right)$ …………………………..



Calculons $p(X=1)$

---

4 chemins réalisent l'événement $(X=1)$.

Chaque chemin a une probabilité égale à $p^1(1-p)^3$ **donc** $p(X=1) = 4 \times p^1 \times (1-p)^3$

Calculons $p(X=2)$

---

6 chemins réalisent l'événement $(X=2)$.

Chaque chemin a une probabilité égale à $p^2(1-p)^2$ **donc** $p(X=2) = 6 \times p^2 \times (1-p)^2$

Calculons $p(X=3)$

---

4 chemins réalisent l'événement $(X=3)$.

Chaque chemin a une probabilité égale à $p^3(1-p)^1$ **donc** $p(X=3) = 4 \times p^3 \times (1-p)^1$

3. Coefficients binomiaux

Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres *n* et *p*.

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à *k* succès sur *n* tentatives.

D'après l'arbre précédent on a donc $\binom{4}{1} = 4$ $\binom{4}{2} = 6$ $\binom{4}{3} = 4$

Par convention $\binom{0}{0}$=1 et on a les propriétés suivantes :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

4. Loi binomiale

Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres *n* et *p*.
Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès.
On dit que *X* suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée b(*n* ; *p*).

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale b(n ; p).
Alors, pour tout entier $0 \leq k \leq n$:

- $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $p(X \geq k) = 1 - p(X < k)$
- $p(X \leq k) = 1 - p(X > k)$

***P*(*X*=*k*) avec la calculatrice**

Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFdP* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFdP(n,p,k)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominalePD(n,p,k)

***P*(*X*<*k*) avec la calculatrice**

Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFRep* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFRep(n,p,k)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominaleCD(n,p,k)

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale B(n ; p).

Alors :

- $E(X) = np$ — $E(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X. C'est le nombre moyen de succès que l'on peut espérer obtenir sur n épreuves.
- $V(X) = np(1-p)$ — $V(X)$ est la variance de la variable aléatoire X.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ — $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X.

Exercice

Un sondage a été effectué auprès des anciens élèves d'un lycée quelques années après l'obtention de leur baccalauréat.
Ce sondage révèle que 55% d'entre eux poursuivent leurs études à la faculté, 10% ont intégré une école d'ingénieur et le pourcentage restant est sur le marché du travail (en activité ou en recherche d'emploi).

Ce sondage révèle aussi que :

- 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études à la faculté ont fait le choix de vivre en colocation.
- 30% des anciens élèves qui ont intégré une école d'ingénieur ont fait le choix de vivre en colocation.
- 15% des anciens élèves sur le marché du travail ont fait le choix de vivre en colocation.

On interroge au hasard un ancien élève du lycée et on note :
F l'événement : « l'ancien élève poursuit ses études à la faculté » ;
I l'événement : « l'ancien élève a intégré une école d'ingénieur » ;
T l'événement : « l'ancien élève est sur le marché du travail » ;
C l'événement : « l'ancien élève vit en colocation ».

1°. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2°. a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $F \cap C$ puis calculer la valeur exacte de sa probabilité.
b) Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,33.

3°. Un ancien élève vit en colocation. Calculer la probabilité qu'il poursuive ses études à la faculté.

4°. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le responsable du sondage affirme : « Plus de la moitié des élèves n'ayant pas fait le choix de la colocation poursuivent des études ». Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

5°. On interroge au hasard trois anciens élèves. On suppose que le nombre d'anciens élèves est suffisamment important pour considérer que ce choix est fait de manière indépendante.

Calculer la probabilité pour qu'au moins un des anciens élèves vive en colocation. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.