**Correction du DST3**

**Exercice 1 :**

1)

a- $f'$ s'annule lorsque sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses. Par lecture graphique on obtient : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

b- $f''$ s'annule lorsque la courbe représentative de $f'$ présente une tangente horizontale. Par lecture graphique on obtient : $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$

c- $f''(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f'$ au point d'abscisse 0. Cette tangente est la droite représentée sur le graphique. Par lecture graphique on obtient : $f''(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{2}$

2)

a. On s'intéresse aux propriétés suivantes

| P$_1$ : $f$ présente un extremum si et seulement si $f'$ s'annule en changeant de signe |
|---|

Or $f'$ s'annule en changeant de signe pour $x$ = -2 donc $f$ présente un extremum en $x$ = -2

**Les courbes 3 et 4 ne correspondent pas, l'extremum étant en $x$ = 0.**

| P$_2$ : $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si $f'$ est positive sur $I$ |
|---|

Or $f'$ est positive sur [-2 ;+∞ [ donc $f$ est croissante sur [-2 ;+∞ [

La courbe 2 présente une fonction décroissante sur [-2 ;+∞ [

Par déduction ***f* est représentée par la courbe n°1**

| P$_3$ : $f'$ est croissante sur $I$, si et seulement $f''$ est positive sur $I$ |
|---|

Or $f'$ est croissante sur I= ]- ∞ ;-1] et décroissante sur J=[-1 ;+∞ [

donc $f''$ s'annule en changeant de signe pour $x$ = -1 en étant positive sur I et négative sur J.

La courbe 1 présente une fonction négative sur ]-2,25 ;-1[ donc elle ne convient pas (on le savait déjà car on l'a identifiée comme étant la courbe représentative de $f$ ). De même, la courbe n°2 présente une fonction négative sur ]- ∞ ;-2,25[ donc elle ne convient pas. De la même façon, la courbe n°4 présente une fonction négative sur I donc elle ne convient pas.

**On observe en revanche que la courbe n°3 présente bien une fonction positive sur I=]- ∞ ;-1] et négative sur J=[-1 ;+∞ [**

b- Propriété 4 : $f$ est convexe sur I si et seulement si $f'$ est croissante sur I.

Or d'après la courbe représentative de $f$ ' on constate que $f'$ est croissante sur I=]- ∞ ;-1] et décroissante sur J=[-1 ;+∞ [ donc $f$ est convexe sur I et concave sur I.

c- Propriété 5 : $f$ présente un point d'inflexion en $x_0$ si et seulement si $f'$ présente un extremum en $x_0$.

Or $f'$ présente un extremum en $x_0$ = - 1 donc $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion en $x_0$ = -1.

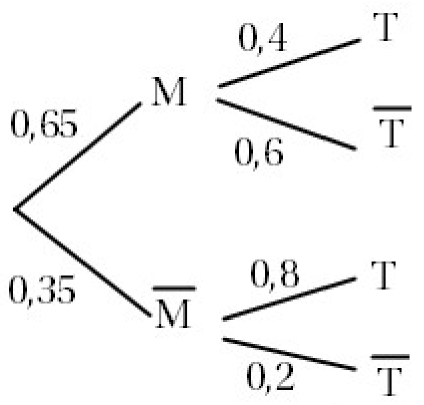
**Exercice 2 :**

Partie A : organisation de l'information

1. On sait que $p(\overline{M} \cap T) = 0,28$ et $p(M) = 0,65$.
   La probabilité que la fiche soit celle d'un client qui fait un usage professionnel du disque dur externe sachant qu'il l'utilise avec un ordinateur fixe est notée $p_{\overline{M}}(T)$.

   $$p_{\overline{M}}(T) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(\overline{M})} = \frac{0,28}{1-0,65} = 0,8$$

2. 




3. La probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur portable pour un usage professionnel est notée $p(M \cap T)$
   $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,65 \times 0,4 = 0,26$

4. La probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel est notée $p(T)$
   2 issues réalisent $T$ : $T = \{M \cap T ; \overline{M} \cap T\}$
   D'après la formule des probabilités totales :
   $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0,26 + 0,28 = 0,54$

5. On cherche la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur fixe sachant que la fiche est celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel. Cette probabilité est notée $p_T(\overline{M}) = \dfrac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,28}{0,54} \approx 0,519$

Partie B

1. $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$= 50 et $p$ = 0,02.

2. $P(X = 1)$ est la probabilité qu'exactement 1 disque dur parmi les 50 présente une défaillance la première année de fonctionnement.
   A l'aide de la calculatrice, avec BinomFPD(50,0,02,1) on obtient : $P(X = 1) = 0,371$

3. La probabilité qu'au moins un des disques durs achetés présente une défaillance au cours de l'année est $P(X \geq 1)$.
   $P(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^{50} = 0,636$

**Exercice 3 :**

Attention, $x$ est exprimé en milliers d'unités et $C_T(x)$ en milliers d'euros. Une précision à 3 chiffres après la virgule au moins est donc indispensable.

Partie A

1) La fonction $C_T$ est définie, continue et deux fois dérivable sur $I$ = [0 ;12] car c'est une fonction polynôme.
Les variations de $C_T$ se désuisent du signe de sa dérivée, et pour tout $x \in I$ on a :
$C'_T(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$ nul pour $x$ = 0 et strictement positif pour $x$ > 10 par produit de 2 facteurs strictement positifs.
Il en résulte que $C_T$ est strictement croissante sur $I$.

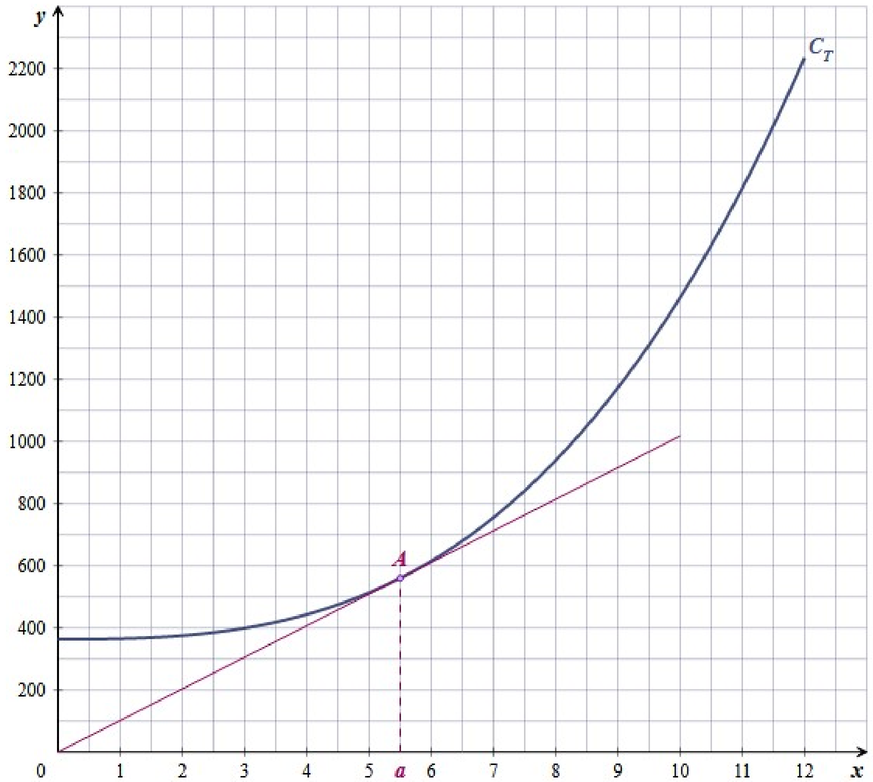
2) $C_T$ est continue et strictement croissante sur $I$ = [0 ;12] à valeurs dans $[C_T(0) ; C_T(12)]$=[363 ;2235] or $2000 \in [C_T(0) ; C_T(12)]$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C_T(x)$=2000 admet une unique solution $\alpha$ dans $I$ = [0 ;12].

3) L'entreprise souhaite limiter son coût de production mensuel à 2000 milliers d'euros, cela revient à $C_T(x) \leq 2000$.
La calculatrice graphique en mode G-SOLV nous donne $\alpha \approx 11,461$ soit 11400 à une centaine d'articles près. (en effet si on arrondit à 11500, on dépasse les 2000 milliers….).

L'entreprise doit donc produire moins de 11400 articles.

Partie B

1) *On cherche une tangente passant par l'origine du repère. C'est une situation qui a été étudiée deux fois en exercices. Il est donc important de travailler à la maison sur les exercices proposés par le professeur.*
a)



b) *On a vu en exercice que le coût moyen est minimal lorsque la tangente à la courbe passe par l'origine du repère et que dans ce cas, le coût marginal est égal au coût moyen.*
*Le tracé effectué à la question a) permet de conjecturer que le coût moyen est minimal pour x = 5,5.*
*Il en résulte donc que $C_M$ est décroissante sur ]0 ;5,5] et croissante sur [5,5;12].*

Dans l'esprit de l'exercice (voir questions suivantes), on n'a pas à utiliser ce résultat qui doit à présent être connu. En revanche il faut donner du sens au quotient :

**Voici ce qu'il fallait répondre :**
Pour tout point M($x$ ;$C_T(x)$) de la courbe $\mathcal{C}_T$ avec $x\neq 0$, le coefficient directeur de la droite (OM) est : $m=\dfrac{C_T(x)}{x}=C_M(x)$
<u>Graphiquement</u>, le coût moyen de production (coefficient directeur) est minimal pour l'abscisse a du point A de la courbe $\mathcal{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à la courbe $\mathcal{C}_T$ .

Avec la précision permise par le graphique, le coût moyen est minimal pour $x$ = 5,5.
Il en résulte donc que $C_M$ est décroissante sur ]0 ;5,5] et croissante sur [5,5;12].

2) pour $x\neq 0$ $C_M(x)=x^2+x+\dfrac{363}{x}$

Pour tout $x\neq 0$ $C_M'(x)=2x+1-\dfrac{363}{x^2}$

Réduisons au même dénominateur : $C_M'(x)=\dfrac{2x\times x^2+1\times x^2-363}{x^2}=\dfrac{2x^3+x^2-363}{x^2}$

OR $$\frac{(2x-11)(x^2+6x+33)}{x^2}=\frac{2x^3+12x^2+66x-11x^2-66x-363}{x^2}$$
$$=\frac{2x^3+x^2-363}{x^2}=C_M'(x)$$

On en déduit que la forme factorisée (très utile pour l'étude de signe..) de $C_M'(x)$ est
$$C_M'(x)=\frac{(2x-11)(x^2+6x+33)}{x^2}=\frac{2x^3+12x^2+66x-11x^2-66x-363}{x^2}$$

4) Les variations de $C_M$ se déduisent du signe de sa dérivée $C_M'$.

Or sur ]0 ;12] $C_M'$ est du signe de $(x^2+6x+33)(2x-11)$

- Le signe du premier facteur s'étudie à l'aide du discriminant
  $\Delta=b^2-4ac$ avec $a=1$ $b=6$ $c=33$ ; par calcul mental on a $\Delta<0$ donc le trinôme est de signe constant, toujours du signe de $a$ donc positif ici car $a>0$.

  Le produit est donc du signe du second facteur.

| $x$ | 0 | | 5,5 | | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_M'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $C_M(x)$ | ‖ | ↘ | | ↗ | |

- Le second facteur est une expression du premier degré qui s'annule pour $x$ =5,5

5) Le coût moyen est minimum pour $x$ = 5,5.
   Déterminons le coût marginal pour tout $x \in \left]0\,;12\right]$

   On a $C_m(x) = C'_T(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$

   Pour $x$ = 5,5 on a : $C_m(5{,}5) = 5{,}5(3 \times 5{,}5 + 2) = 101{,}75$

   $$C_M(5{,}5) = 5{,}5^2 + 5{,}5 + \frac{363}{5{,}5} = 101{,}75$$

   On retrouve bien le fait que lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.