

Chapitre 4 : suites numériques

Dès l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (-287 ; -212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π . Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus



grand. Par ce procédé, *Archimède* donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.

Vers la fin du XVIII^e siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...

Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaîtra qu'au début du XIX^e siècle avec le mathématicien français *Augustin Louis Cauchy* (1789 ; 1857) – *ci-contre*.

I. Vocabulaire et notations

1) Définition d'une suite numérique

a) exemple d'introduction :

On considère la liste de nombres suivants :
 $-2,7 ; 3 ; -5,1 ; 9 ; -12,4 ; -7,8 ; 2,6 \dots$

Cette liste de nombres comporte 7 **termes**.
 Le premier **terme** de cette liste est $-2,7$

Si on note (U_n) l'ensemble des **termes** de cette suite de nombres on a alors :
 $U_0 = -2,7 ; U_1 = 3 ; U_2 = -5,1 ; U_3 = 9 ; U_4 = -12,4 ; U_5 = -7,8 ; U_6 = 2,6 \dots$

On a ainsi défini une suite numérique.

Définitions :

Une suite est souvent notée par une lettre U, V, W etc...

Une **suite numérique** (U_n) est une **liste ordonnée de nombres réels** qui sont **numérotés par des entiers naturels**, en commençant en général par 0 ou 1.

b) suite et fonction :

On peut définir une suite (U_n) comme une fonction U de \mathbb{N} dans \mathbb{R}

$$U: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto U(n) = U_n$$

Définition : Une **suite numérique** (U_n) est une fonction qui à tout entier n associe un nombre réel noté U_n ou $U(n)$.

Dans l'exemple précédent on a alors :

$$U(0)=U_0 = -2,7, \quad U(1)=U_1 = 3, \quad U(2)=U_2 = -5,1, \quad U(3)=U_3 = 9, \quad U(4)=U_4 = -12,4$$

$$U(5)=U_5 = -7,8, \quad U(6)=U_6 = 2,6.$$

c) Vocabulaire et notation :

U_n est appelé le **terme de rang n** (ou d'indice n) de la suite u ou (U_n) .

$U_0 = -2,7$ est le terme de rang 0. Mais c'est le premier terme de la suite.

Le deuxième terme est $U_1 = 3$.

$U_1 = 3$ est le terme de rang 1.

Le terme de rang 2 est $U_2 = -5,1$. C'est ici le 3^{ème} terme de la suite.

$U_3 = 9$ est le terme de rang 3. Mais c'est ici le 4^{ème} terme de la suite.

Le terme de rang 5 est $U_5 = -7,8$.

Le 7^{ème} terme est $U_6 = 2,6$

2) Suite définie par une formule explicite

 **Vidéo** <https://youtu.be/HacflVQ7DIE>

Exemples :

a) Pour tout n de \mathbb{N} , on donne : $U_n = 2n$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$U(0) = U_0 = 2 \times 0 = 0,$$

$$U(1) = U_1 = 2 \times 1 = 2,$$

$$U(2) = U_2 = 2 \times 2 = 4,$$

$$U(3) = U_3 = 2 \times 3 = 6.$$

Remarque : Cette suite définit la suite des nombres pairs.

b) Pour tout n de \mathbb{N} , on donne : $V_n = 3n^2 - 1$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$V_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1,$$

$$V_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2,$$

$$V_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11,$$

$$V_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26.$$

Lorsqu'on génère une suite par une **formule explicite**, chaque terme de la suite est exprimé **en fonction de n** et indépendamment des termes précédents.

3) Suite définie par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite (u_n) par :

$U_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$U_0 = 5,$$

$$U_1 = 3 \times U_0 = 3 \times 5 = 15,$$

$$U_2 = 3 \times U_1 = 3 \times 15 = 45.$$

De façon générale, on peut noter : $U_{n+1} = 3U_n$

- On définit la suite (V_n) par :

$V_0 = 3$ et pour tout n de \mathbb{N} , $V_{n+1} = 4V_n - 6$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$V_0 = 3,$$

$$V_1 = 4V_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6,$$

$$V_2 = 4V_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18,$$

$$V_3 = 4V_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66.$$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple V_{13} sans connaître V_{12} .

Il est toutefois possible d'écrire un algorithme que l'on peut coder ensuite en langage Python :

 **Vidéos dans la Playlist :**

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoqExMkHrhYvWi4dHnApgG>

avec une boucle POUR

fonction suite1(n)

$u \leftarrow 3$

pour i allant de 1 à n

$U \leftarrow 4 * u - 6$

Fin_pour

retourner u

```
def suite1(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return u
```

avec une boucle Tant_que

fonction suite2(n)

$u \leftarrow 3$

$i \leftarrow 0$

Tant_que i < n

$u \leftarrow 4 * u - 6$

$i \leftarrow i + 1$

Fin_Tant_que

retourner u

```
def suite2(n):
    u=3
    i=0
    while i<n:
        u=4*u-6
        i=i+1
    return u
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

Ou sur une calculatrice :

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u-6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
      67108866
      Fait
```

Sur Casio :

```
=====SUITE=====
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u-6→u↵
Next↵
u↵
```

```
?
13
      67108866
      -Disp-
```

Lorsqu'on génère une suite par une relation de **réurrence**, chaque terme de la suite s'obtient à **partir de son terme précédent**.

A noter : Le mot *réurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

4) Représentation graphique d'une suite

▶ Vidéo <https://youtu.be/VpSK4uLTFhM>

La représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un **nuage de points** de coordonnées $(n; U_n)$.

Exemple :

On considère la suite U définie pour tout n de \mathbb{N} par : $U_n = \frac{n^2}{2} - 3$

La suite est définie de façon explicite : on peut écrire $U(n) = \frac{n^2}{2} - 3$

U_n est exprimé en fonction de n .

On construit à l'aide de la calculatrice en mode TABL le tableau de valeurs des premiers termes de la suite :

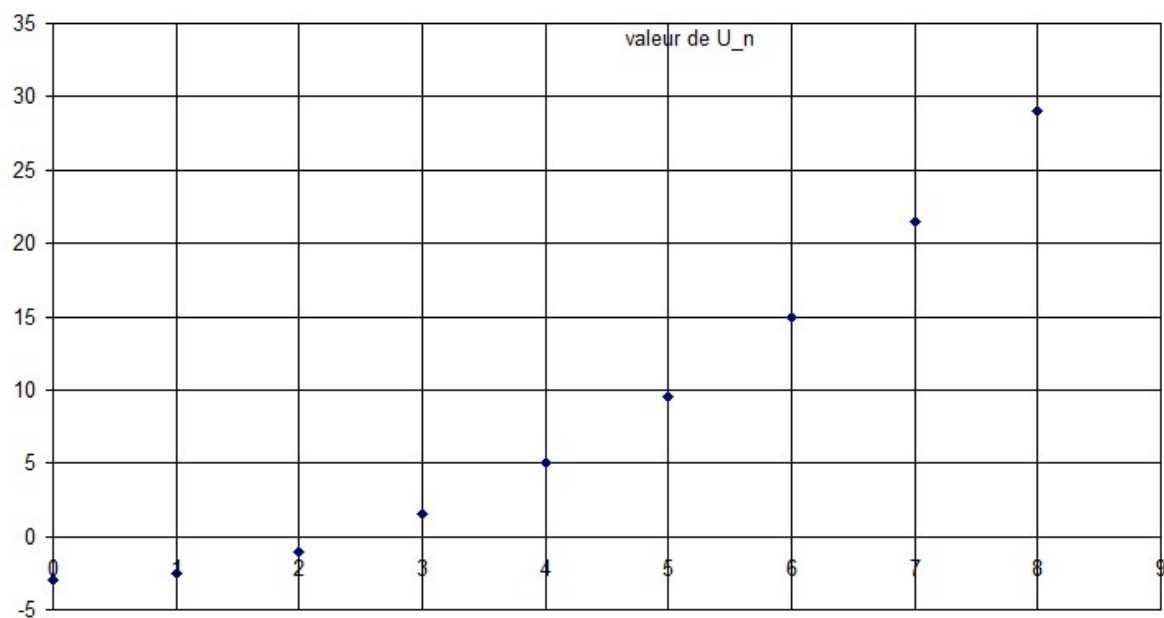
| | | | | | | | | | |
|-------|----|------|----|-----|---|-----|----|------|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| U_n | -3 | -2,5 | -1 | 1,5 | 5 | 9,5 | 15 | 21,5 | 29 |

Il est possible d'obtenir les termes consécutifs d'une suite puis le nuage de points à l'aide d'un tableur.

Dans cet exemple, la formule à recopier vers le bas en cellule B2 est : **=A2^2 / 2 - 3**

| SOMME | | =A2^2/2-3 |
|-------|-----------|---------------|
| | A | B |
| 1 | valeur de | valeur de U_n |
| 2 | 0 | =A2^2/2-3 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | |
| 6 | 4 | |
| 7 | 5 | |
| 8 | 6 | |
| 9 | 7 | |
| 10 | 8 | |

| | A | B |
|----|-------------|---------------|
| 1 | valeur de n | valeur de U_n |
| 2 | 0 | -3 |
| 3 | 1 | -2,5 |
| 4 | 2 | -1 |
| 5 | 3 | 1,5 |
| 6 | 4 | 5 |
| 7 | 5 | 9,5 |
| 8 | 6 | 15 |
| 9 | 7 | 21,5 |
| 10 | 8 | 29 |



II. Sens de variation d'une suite numérique

1) Exemple

On a représenté ci-dessus le nuage de points des premiers termes de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{n^2}{2} - 3$, pour tout entier naturel n .

On observe que le nuage de points monte : on peut donc conjecturer que cette suite est croissante.

On constate par exemple que $U_1 < U_2$ ou encore $U_4 < U_5$.

De manière générale, on peut écrire :

Pour tout entier naturel n , $U_n < U_{n+1}$

Définitions : Soit une suite numérique (u_n) .

- La suite (u_n) est **croissante** signifie que pour tout entier n , on a $U_{n+1} \geq U_n$.

- La suite (u_n) est **décroissante** signifie que pour tout entier n , on a $U_{n+1} \leq U_n$.

2) Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite numérique

Pour connaître le sens de variation d'une suite (U_n) on étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ pour tout entier n .

- Si pour tout entier n , on a $U_{n+1} - U_n \geq 0$. alors la suite (U_n) est **croissante**.

- Si pour tout entier n , on a $U_{n+1} - U_n \leq 0$. alors la suite (U_n) est **décroissante**.

 Vidéo <https://youtu.be/Sy7iOLyyqeQ>

a) Pour tout n de \mathbb{N} , on donne la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = U_n + 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 2 > 0$

Donc (U_n) est croissante.

b) Pour tout n de \mathbb{N} , on donne la suite (V_n) définie par : $V_n = 4n + 4$.

Démontrer que la suite (V_n) est croissante.

Solution :

Étudions le signe de la différence $V_{n+1} - V_n$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = 4n + 4$ donc $V_{n+1} = 4(n+1) + 4 = 4n + 4 + 8 = 4n + 8$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} - V_n = 4n + 8 - (4n + 4) = 4n + 8 - 4n - 4 = 4$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} - V_n > 0$.

Donc la suite (V_n) est croissante.

III. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant (ou en soustrayant) toujours la même quantité r appelée **raison** de la suite.

Cette définition met en évidence la forme récurrente d'une suite arithmétique.

On a le schéma suivant :

$$U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$$

Forme récurrente d'une suite arithmétique :

Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n + r$

Exemples :

a) Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$

Donner les 4 premiers termes de la suite.

Donner la forme récurrente de la suite.

Solution :

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| U_0 | U_1 | U_2 | U_3 |
| 2 | 5 | 8 | 11 |
| $+3$ | $+3$ | $+3$ | |

On a le schéma suivant :

$$U_n \xrightarrow{+3} U_{n+1}$$

Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n + 3$

b) Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_1 = 8$ et de raison $r = -5$
 Donner le terme de rang 4.
 Donner la forme récurrente de la suite.

Solution : $V_4 = -7$

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| V_1 | V_2 | V_3 | V_4 |
| 8 | 3 | -2 | -7 |
| | -5 | -5 | -5 |

On a le schéma suivant :

$$V_n \xrightarrow{-5} V_{n+1} \quad \text{Pour tout entier naturel } n, V_{n+1} = V_n - 5$$

c) Soit (W_n) la suite arithmétique telle que $W_9 = 3,6$ et $W_8 = 5,2$.

Calculer la raison r .

Calculer W_7 .

Solution :

On a le schéma suivant :

$$W_n \xrightarrow{+r} W_{n+1} \quad \text{Pour tout entier naturel } n, W_{n+1} = W_n + r$$

$$W_8 \xrightarrow{+r} W_9$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} W_8 + r &= W_9 \\ r &= W_9 - W_8 \\ \text{donc } r &= 3,6 - 5,2 = -1,6 \end{aligned}$$

$$W_7 \xrightarrow{+r} W_8$$

$$\xleftarrow{-r}$$

$$\text{donc } \begin{aligned} W_7 &= W_8 - r \\ &= 5,2 - (-1,6) \\ &= 5,2 + 1,6 \\ W_7 &= 6,8 \end{aligned}$$

2) Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique (ou pas !)

Pour montrer qu'une suite (U_n) est une suite arithmétique il suffit de montrer que la **différence** $U_{n+1} - U_n$ entre deux termes consécutifs quelconques est constante pour tout entier naturel n . Cette différence correspond alors à la raison de la suite.

Exemples :

a) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U(0) = 2 \\ U(n+1) = U(n) + 5 \text{ pour tout entier } n \geq 0 \end{cases}$
 Démontrer que la suite U est arithmétique. Préciser sa raison.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, \quad U(n+1) &= U(n) + 5 \\ \Leftrightarrow U(n+1) - U(n) &= 5 \end{aligned}$$

La différence $U(n+1) - U(n)$ est constante, égale à 5, pour tout entier naturel n , donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$.

b) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V(n) = n^2 + n - 2$.
 La suite V est-elle arithmétique ? Justifier avec soin.

Solution 1:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, \quad V(n+1) - V(n) &= (n+1)^2 + (n+1) - 2 - [n^2 + n - 2] \\ &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 2 - n^2 - n + 2 \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

La différence $V(n+1) - V(n)$ n'est pas constante, donc (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

Solution 2:

Calculons les 3 premiers termes de la suite V .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, \quad V(n) &= n^2 + n - 2 \\ \text{donc } V(0) &= 0^2 + 0 - 2 = -2 \\ V(1) &= 1^2 + 1 - 2 = 0 \\ V(2) &= 2^2 + 2 - 2 = 4 \end{aligned}$$

D'une part :
 $V(1) - V(0) = 2$

D'autre part :
 $V(2) - V(1) = 4$

$V(1) - V(0) \neq V(2) - V(1)$ donc (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

La différence $V(n+1) - V(n)$ n'est pas constante, donc (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

b) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V(n) = n^2 + n - 2$.
La suite V est-elle arithmétique ? Justifier avec soin.

3) Sens de variation

Propriété : (U_n) est une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (U_n) est constante.
- Si $r < 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

4) Représentation graphique

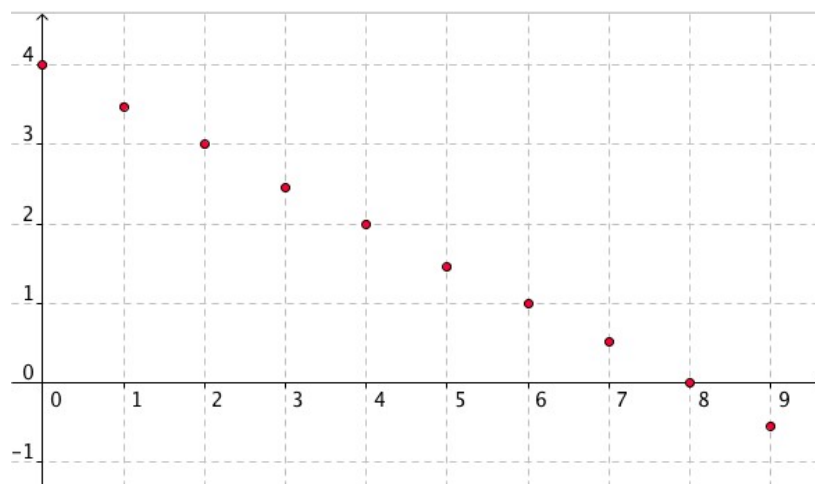
Définition : Si une suite (U_n) est une **suite arithmétique** alors, dans un repère du plan, tous les points de coordonnées $(n; U_n)$ sont alignés.

Réciproquement, si dans un repère du plan, tous les points de coordonnées $(n; U_n)$ sont alignés, alors la suite (U_n) est une **suite arithmétique** dont la raison correspond au coefficient directeur de la droite.

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



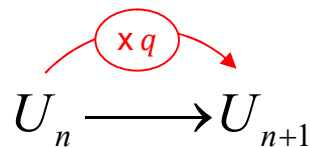
IV. Suites géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant (ou en divisant) toujours par la même quantité q appelée **raison** de la suite.

Cette définition met en évidence la forme récurrente d'une suite géométrique.

On a le schéma suivant :



Forme récurrente d'une suite arithmétique :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = U_n \times q$$

Exemples :

a) Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 1,2$

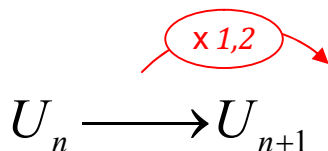
Donner les 4 premiers termes de la suite.

Donner la forme récurrente de la suite.

Solution :

| | | | |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| U_0 | U_1 | U_2 | U_3 |
| 5 | 6 | 7,2 | 8,64 |
| | $\times 1,2$ | $\times 1,2$ | $\times 1,2$ |

On a le schéma suivant :



$$\text{Pour tout entier naturel } n, U_3 = U_0 \times 1,2^3 \quad U_{n+1} = U_n \times 1,2$$

Remarque 1: multiplier par 1,2 revient à augmenter de 20%

Remarque 2 : $U_3 = U_0 \times q \times q \times q$

On a donc $U_3 = U_0 \times q^3$

Et de façon générale : $U_n = U_0 \times q^n$: C'est la **forme explicite d'une suite géométrique**

b) Soit (V_n) la suite géométrique de raison 0,8 telle que $V_7 = 16$. Calculer V_6 .
Donner la forme récurrente de la suite.

Solution :

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \textcircled{x 0,8} \\ \nearrow \\ V_6 \longrightarrow V_7 \\ \searrow \\ \textcircled{\div 0,8} \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} V_6 \times 0,8 = V_7 \\ V_6 = V_7 \div 0,8 \quad r = 3,6 - 5,2 = -1,6 \end{array}
 \end{array}$$

$$V_n \longrightarrow V_{n+1} \quad \text{Pour tout entier naturel } n, V_{n+1} = 0,8 \times V_n$$

2) Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique (ou pas !)

Pour montrer qu'une suite (U_n) est une suite géométrique de raison il suffit de montrer que le **quotient** $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ entre deux termes consécutifs quelconques est constant pour tout entier naturel n . Ce quotient correspond alors à la raison q de la suite.

Exemples :

a) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U(0) = 2 \\ U(n+1) = 5 U(n) \text{ pour tout entier } n \geq 0 \end{cases}$
Démontrer que la suite U est géométrique. Préciser sa raison.

Solution :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout entier } n, \quad U(n+1) &= 5U(n) \\
 \Leftrightarrow \frac{U(n+1)}{U(n)} &= \frac{5U(n)}{U(n)} \\
 \Leftrightarrow \frac{U(n+1)}{U(n)} &= 5
 \end{aligned}$$

Le quotient $\frac{U(n+1)}{U(n)}$ est constant, égale à 5, pour tout entier naturel n , donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$.

b) Les nombres 3 ; 9 ; 27 ; 80 et 240 sont-ils les termes successifs d'une suite géométrique ? Justifier avec soin.

Solution :

Posons $U_0 = 3$; $U_1 = 9$; $U_2 = 27$; $U_3 = 80$; $U_4 = 240$

D'une part :

$$\frac{U(1)}{U(0)} = \frac{U(2)}{U(1)} = \frac{U(4)}{U(3)} = 3$$

D'autre part :

$$\frac{U(3)}{U(2)} = \frac{80}{27} \neq 3$$

Les quotients ne sont pas égaux donc (U_n) n'est pas une suite géométrique.

3) Sens de variation

Propriété : (U_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $U_0 > 0$.

- Si $q > 1$ alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (U_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Exemples :

Donner le sens de variation des suites géométriques (U_n) de premier terme $U_0 > 0$ donné et de raison q dans les cas suivants :

a) $q = 1,7$. $q > 1$ donc (U_n) est croissante.
Multiplier par 1,7 revient à augmenter de 70%.

b) $q = 0,72$. $0 < q < 1$ donc (U_n) est décroissante.
Multiplier par 0,72 revient à diminuer de 28%.

c) $q = 1,032$. $q > 1$ donc (U_n) est croissante.
Multiplier par 1,032 revient à augmenter de 3,2%.

4) Représentation graphique

Définition : Si une suite (U_n) est une **suite géométrique** alors, dans un repère du plan, les points de coordonnées $(n; U_n)$ forment un **nuage de points exponentiel**.

Réciproquement, si dans un repère du plan, tous les points de coordonnées $(n; U_n)$ forment un **nuage de points exponentiel**, alors la suite (U_n) est une **suite géométrique** dont la raison correspond au coefficient multiplicateur entre les ordonnées de 2 points consécutifs du nuage de points.

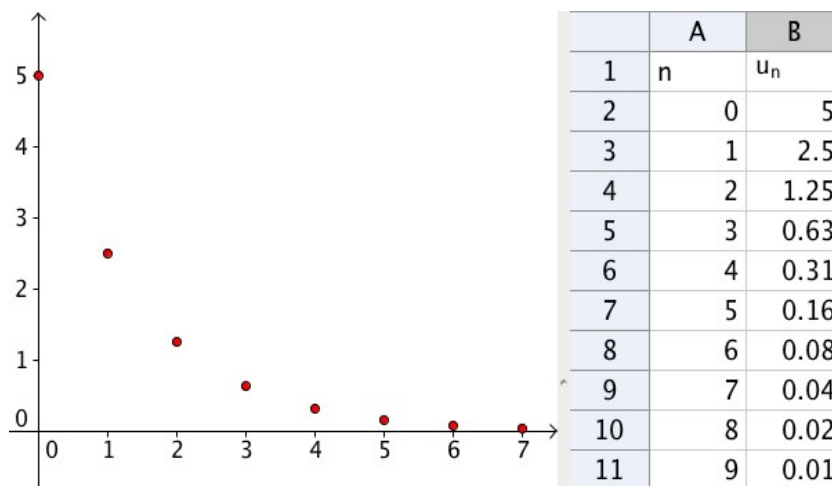
Exemple :

Soit la suite (U_n) définie par $u_{n+1} = 0,5 u_n$ et $u_0 = 5$.

Pour tout entier naturel on a : $\frac{U(n+1)}{U(n)} = 0,5$

donc la suite (U_n) est géométrique de raison 0,5.
 $q = 0,5 : 0 < q < 1$ donc (U_n) est décroissante.

Le nuage de points forme un nuage exponentiel.



RÉSUMÉ

| | | |
|--------------------------|---|---|
| | (u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0 | Exemple : $r = -0,5$ et $u_0 = 4$ |
| Définition | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$. |
| Variations | Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante. | $r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. | |

| | | |
|--------------------------|--|---|
| | (u_n) une suite géométrique - de raison $q > 0$ - de premier terme $u_0 > 0$ | Exemple : $q = 0,5$ et $u_0 = 5$ |
| Définition | $u_{n+1} = q \times u_n$ | $u_{n+1} = 0,5 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à $0,5$. |
| Variations | Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. | $q = 0,5 < 1$ La suite (u_n) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. | |