Correction du devoir de mathématiques n°6

La calculatrice n'était pas autorisée

Exercice 1 : fonction inverse **6,5 points**

f est la fonction inverse.

1. $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0^- ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0^+

3. Calculer l'image par f des nombres réels suivants :

a. $f(-4) = -\dfrac{1}{4}$ b. $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$ c. $f(5) = \dfrac{1}{5}$ d. $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

e. $f\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{9}{5}$ f. $f\left(-\dfrac{3}{7}\right) = -\dfrac{7}{3}$

4. Calculer l'image par f des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur :

a. $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1\text{x}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\text{x}\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b. $f(3\sqrt{2}) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1\text{x}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\text{x}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

c. $f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = -\dfrac{3\text{x}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\text{x}\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5. Déterminer les antécédents éventuels par f de :

a. $f(x) = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$ b. $f(x) = -7 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{7}$ c. $f(x) = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$

d. $f(x) = -\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{7}$

6. Comparer les inverses des nombres ci-dessous en justifiant mais sans faire de calcul

a. $\dfrac{4}{7} > \dfrac{3}{7} > 0$ or la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc elle change l'ordre sur $]0;+\infty[$ on a donc $f\left(\dfrac{4}{7}\right) < f\left(\dfrac{3}{7}\right)$

b. $-\dfrac{6}{5}$ et -3 . Notons que $-3 = -\dfrac{15}{5}$

$0 > -\dfrac{6}{5} > -\dfrac{15}{5}$ or la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ donc elle change l'ordre sur $]-\infty;0[$ on a donc $f\left(-\dfrac{6}{5}\right) < f(-3)$

c. $\dfrac{7}{2} > 0$ et $-5 < 0$ or l'inverse d'un réel négatif est un réel négatif ; l'inverse d'un réel positif est positif.

Il en résulte que $f\left(\dfrac{7}{2}\right) > 0$ et $f(-5) < 0$ donc $f\left(\dfrac{7}{2}\right) > f(-5)$

Exercice 2 : fonction racine carrée **7,5 points**

g est la fonction racine carrée.

1. $D_g = [0;+\infty[$.
2. Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$

3. Calculer l'image par g des nombres réels suivants :

a. $g(4) = \sqrt{4} = 2$ b. $g(81) = \sqrt{81} = 9$ c. $g(a^2) = \sqrt{a^2} = |a|$

d. $g\left(\dfrac{16}{9}\right) = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$ e. $g\left(\dfrac{36}{49}\right) = \sqrt{\dfrac{36}{49}} = \dfrac{6}{7}$ f. $g(-2)$ n'existe pas : $-2 \notin D_g$

4. Déterminer les antécédents éventuels par g de :

a. $g(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ b. $g(x) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 6^2 = 36$

c. $g(x) = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2$: impossible $\sqrt{x} \geq 0$ pour tout $x \in [0;+\infty[$

d. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0^2 = 0$

e. $g(x) = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 12 \Leftrightarrow x = 12^2 = 144$

5. Comparer les nombres ci-dessous en justifiant mais sans faire de calcul

a. $0 < 3 < 5$ or la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve l'ordre . On en déduit que $\sqrt{3} < \sqrt{5}$

b. $4 < 5$ donc $\sqrt{4} < \sqrt{5}$. On en déduit que $2 < \sqrt{5}$

c. $4 > 3$ donc $\sqrt{4} > \sqrt{3}$. On en déduit que $2 > \sqrt{3}$

6. a. $(\sqrt{3}-2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}$

b. En déduire une expression de $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ avec un seul radical.

On a vu à la question 5c. que $2 > \sqrt{3}$: on a alors 2 $\sqrt{3} - 2 < 0$.

On a donc $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 7 - 4\sqrt{3}$ soit $7 - 4\sqrt{3} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 3 : développer - factoriser **6 points**

1. Développer et réduire :

$A = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$B = (3x+2)(x-8) = 3x^2 - 24x + 2x - 16 = 3x^2 - 22x - 16$

2. Factoriser : *3x0,75 point*

$A = x(x+2) - 3x = x[(x+2) - 3] = x(x-1)$
$B = 5x - 5 = 5(x-1)$
$C = (x+2)(x+1) - 2(x+1) = (x+1)[(x+2) - 2] = x(x+1)$

3. Compléter le tableau suivant afin de mettre en évidence une éventuelle identité remarquable :

Expression à factoriser	I.R n° *	avec a = ….	avec b =….	alors on doit avoir $2ab$ = …**	Est-ce une IR ? ***	Expression factorisée de l'Identité remarquable **
$x^2 - 12x + 9$	2	x	3	$12x$	Oui	$(x-3)^2$
$4x^2 + 20x + 25$	1	$2x$	5	$20x$	Oui	$(2x-5)^2$
$(2x-1)^2 - (x+1)^2$	3	$(2x-1)$	$(x+1)$	-----------	Oui	$[(2x-1)-(x+1)][(2x-1)+(x+1)]$ $= 3x(x-2)$
$x^2 - 6x + 9$	2	x	3	$12x$	NON	----------

**Donner le numéro de l'identité remarquable que l'on cherche à mettre en évidence. (la 1 ou la 2 ou la 3)*

*** rayer la case si nécessaire*

****écrire Oui si c'est bien une Identité remarquable ou Non si ce n'est finalement pas une identité remarquable.*