Correction du devoir de mathématiques n°7

La calculatrice n'était pas autorisée

Exercice 1 : **2 points**

Dresser ci-dessous le tableau de signes de $A(x) = (x-1)(x+3)$ 2 points

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signes **5 points**

1. Compléter le tableau ci-dessous afin de résoudre (E) : $(x+1)(5-x) < 0$ 2 points

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$5-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+1)(5-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

2. $\dfrac{3x+2}{x-2} \leq 5$ 2 est valeur interdite. 3 points

Pour tout $x \neq 2$:

$$\frac{3x+2}{x-2} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+2}{x-2} - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x+2-5(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x+2-5x+10}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2x+12}{x-2} \leq 0$$

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$-2x+12$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+12}{x-2}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$$\frac{3x+2}{x-2} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+2}{x-2} - 5 \leq 0$$

$\mathscr{S} = \left]-\infty ; 2\right[\cup \left[6 ; +\infty\right[$

Exercice 3 : un peu de bon sens ! **3 points**

L'un des deux tableaux de signes ci-dessous correspond au tableau de signes de $f(x) = x^2 + 2x - 3$, c'est sûr !

Tableau 1

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de x^2+2x-3		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau 2

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. $f(-3) = (-3)^2 + 2\times(-3) - 3$
$\qquad = 9 - 6 - 3$
$\qquad = 0$

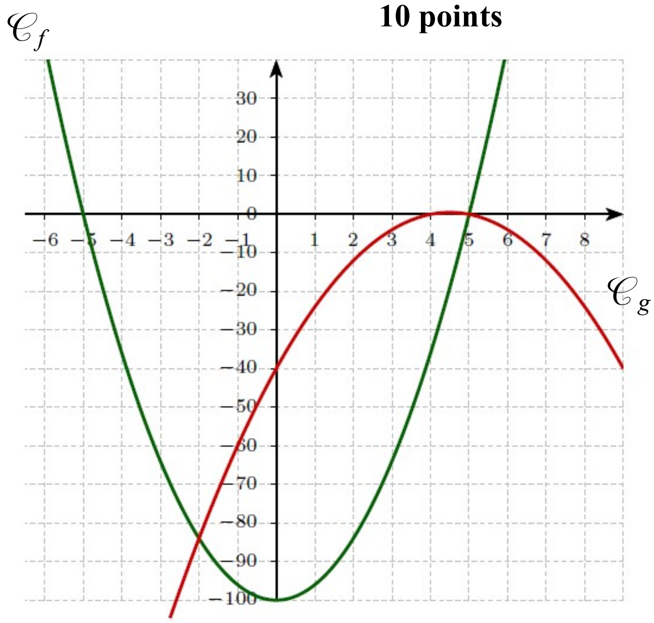
$f(1) = (1)^2 + 2\times(1) - 3$
$\qquad = 1 + 2 - 3$
$\qquad = 0$

Donc -3 et 1 sont bien racines de $f(x)$. 1 point

2. L'ordonnée à l'origine de f est $f(0) = -3$. On a donc $f(0) < 0$
On en déduit que c'est le tableau 2 qui correspond au tableau de signes de $f(x)$. 1 point
3. $-10^9 < -3$ donc $f(-10^9) > 0$ d'après le tableau de signes.
$-3 < 1 - 10^{-11} < 1$ donc $f(1 - 10^{-11}) < 0$ d'après le tableau de signes. 1 point

Exercice 4 : **10 points**

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 100$ et $g(x) = (2x-10)(4-x)$.
Leurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données dans le repère suivant :



1. a) $g(x)=0 \Leftrightarrow (2x-10)(4-x)$ 2 points

$\Leftrightarrow (2x-10)=0$ ou $(4-x)=0$ d'après la règle du produit nul

$\Leftrightarrow x=5$ ou $x=4$

Les antécédents de 0 par g sont 4 et 5.

b) D'après la question a) la courbe qui coupe l'axe des abscisses en– 5 et 5 ne peut pas représenter la fonction g . Il s'agit donc de la courbe $\mathscr{C}_f$. 1 point

c) On peut identifier chaque courbe à l'aide de l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'image de 0. 1 point

2. Pour tout réel x , $f(x) = 4x^2-100$ 1 point

$= (2x)^2-10^2$ $f(x)$ se factorise à l'aide de la 3ème identité

$= (2x-10)(2x+10)$

3. Résoudre l'inéquation $(2x-10)(3x+6)\leq 0$ 2 points

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-10)(3x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} = [-2;5]$

4. Donner une expression factorisée de $f(x)-g(x)$. 2 points

Pour tout réel x , $f(x)-g(x) = (2x-10)(2x+10)-(2x-10)(4-x)$

$= (2x-10)[(2x+10)-(4-x)]$

$= (2x-10)[2x+10-4+x]$

$= (2x-10)[3x+6]$

5. Résoudre graphiquement $(2x-10)(3x+6)\leq 0$ revient donc à savoir quand $f(x)-g(x)\leq 0$ c'est-à-dire quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la courbe $\mathscr{C}_g$.

On retrouve que sur $[-2;5]$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la courbe $\mathscr{C}_g$. 1 point