

Chapitre 5 : Distance d'un point à une droite.

Bissectrice d'un angle.

1. Distance d'un point à une droite.

1.1 Problème

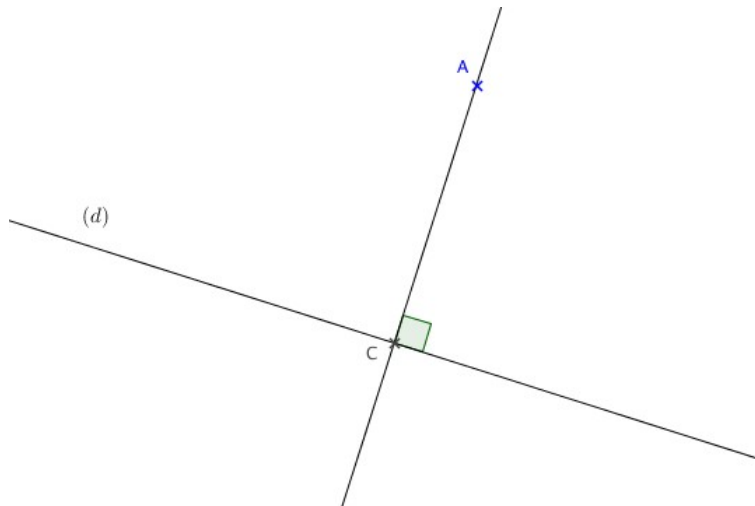
Soient (d) une droite et A un point n'appartenant pas à (d) .

Placer le point H de la droite (d) de telle sorte que la distance de A à H soit la plus petite possible.

1.2 Conjecture

Soient (d) une droite et A un point qui n'appartient pas à (d) .

On appelle C , le pied de la perpendiculaire menée de A à la droite (d) .



Il semble que : AC est la plus petite distance du point A à la droite (d) .

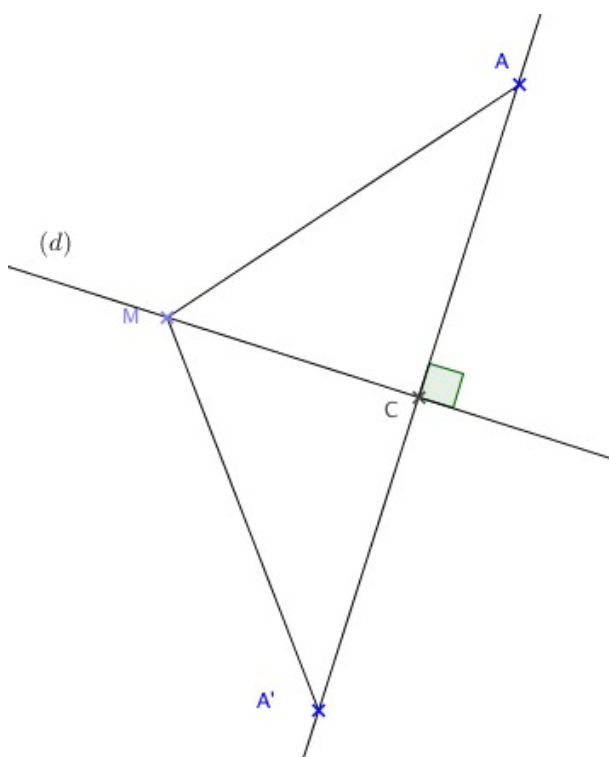
1.3 Démonstration

Hypothèses : (d) est une droite et A un point qui n'appartient pas à (d) .

Reformulons le problème :

Pour démontrer que AC est la plus petite distance du point A à la droite (d) , il faut et il suffit de démontrer que : pour tout point M de (d) distinct de C , on a :

$$AC < AM$$



Soit M un point de (d) distinct de C .

On appelle A' le symétrique de A par rapport à (d) .

- **On démontre que :** $AC = A'C$

On sait que : A et A' sont symétriques par rapport à (d) (hypothèse) et C et M sont invariants par cette même symétrie.

Propriété : Une symétrie axiale transforme un segment en un segment de même longueur.

Conclusion : $AM = A'M$ et $AC = A'C$

- On démontre que : $2AC < 2AM$:

Les points A, M et A' sont tous distincts.

Donc AMA' est un triangle.

D'après l'inégalité triangulaire, on a : $AA' < AM + A'M$

Donc : $2AC < 2AM$

- Conclusion :

On a $2AC < 2AM$

Donc $AC < AM$

1.4 Enoncé de la propriété

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Soient (d) une droite et A un point qui n'appartient pas à (d) .

Si on appelle C, le pied de la perpendiculaire menée de A à la droite (d)

alors C est le point de (d) le plus proche de A.

Remarque: Si le point A appartient à la droite (d) alors le point de (d) le plus proche de A c'est A.

D'où la définition :

Définition :

Soient (d) une droite et A un point.

On appelle C, le pied de la perpendiculaire menée de A à la droite (d) .

AC est appelée la distance du point A à la droite (d) .

Remarque : Dans le cas où A appartient à la droite (d) , la distance de A à (d) est nulle.

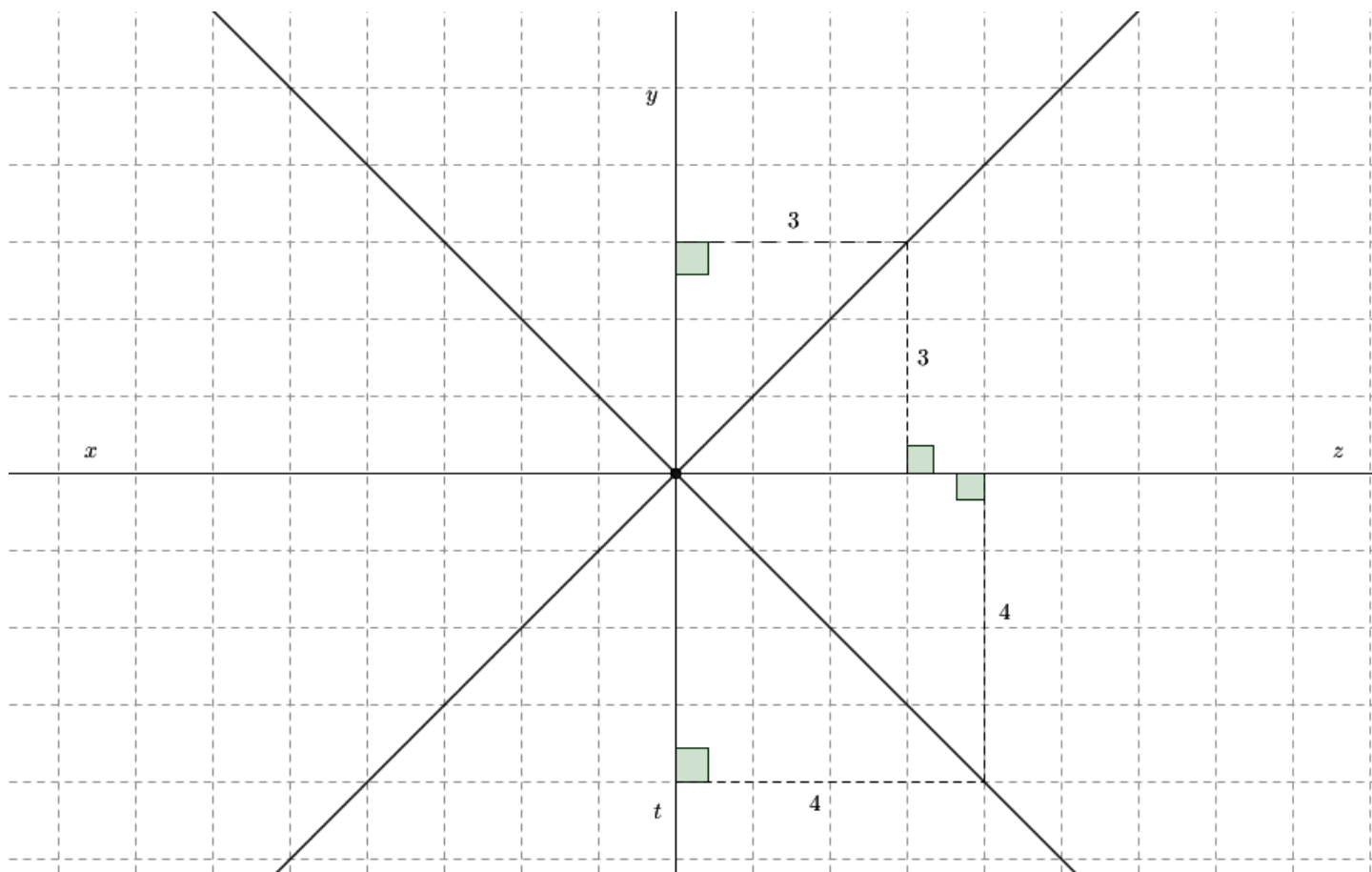
2. Bissectrices d'un angle

2.1 Problème

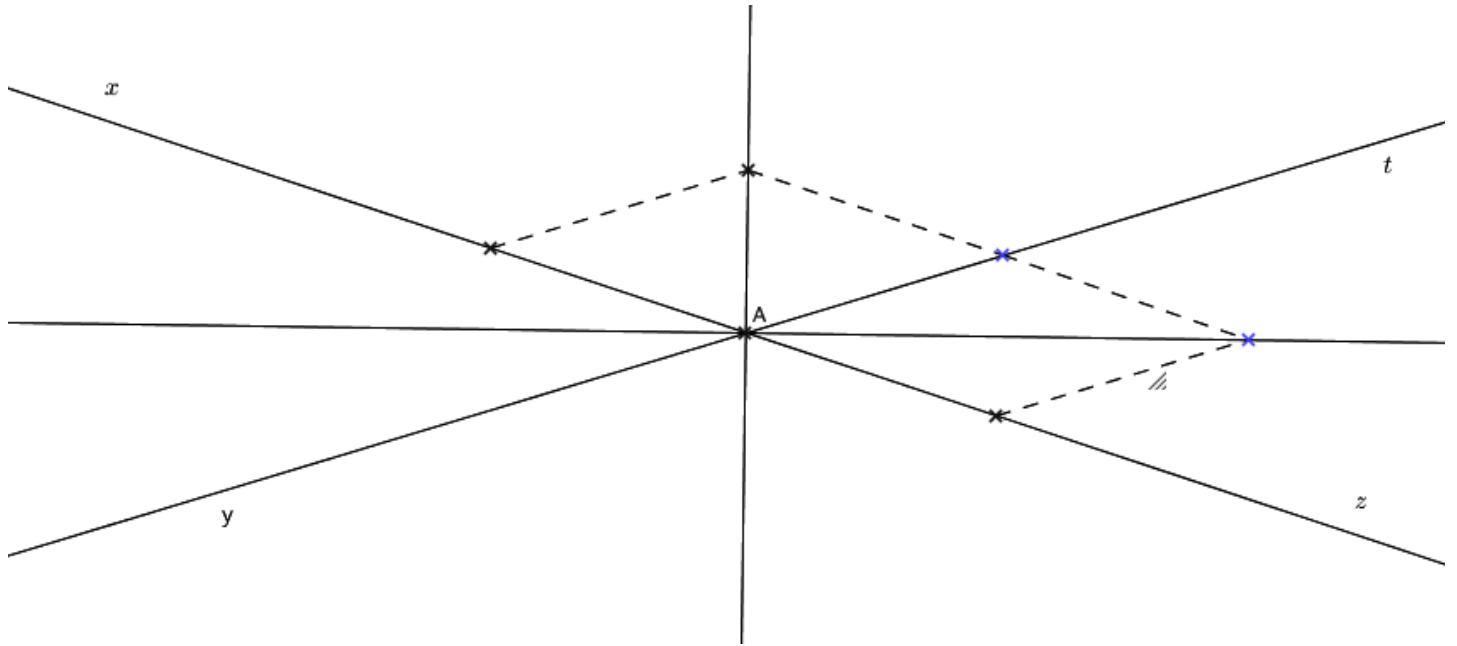
Soient (xz) et (yt) deux droites sécantes.

Trouver tous les points équidistants de (xz) et de (yt) .

2.2 Etudions un cas particulier : (xz) et (yt) sont perpendiculaires.



2.3 Etudions le cas général



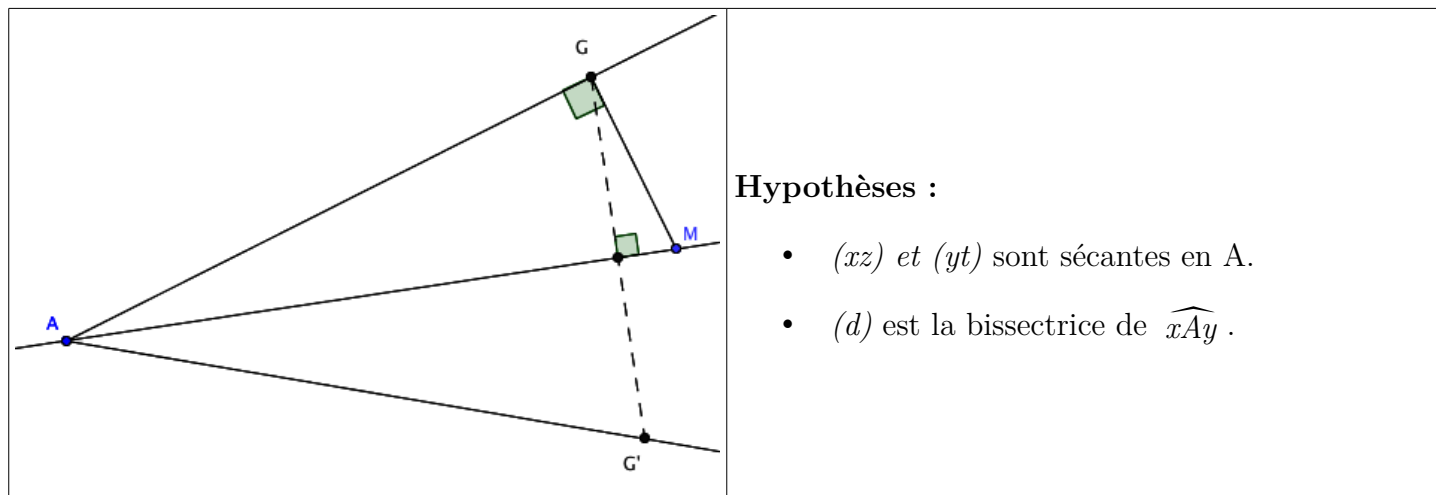
2.4 Conjectures

Hypothèse : (xz) et (yt) sont deux droites sécantes en A.

Il semble que :

- L'ensemble des points équidistants de (xz) et (yt) soient les points des bissectrices des angles \widehat{xAy} et \widehat{xAt} .
- Ces deux bissectrices soient perpendiculaires.

2.3 Démonstration



Soit M, un point de (d) .

On appelle G le pied de la perpendiculaire menée de M à la droite (Ax) .

On appelle G' le symétrique de G par rapport à (d) .

1. On démontre que G' appartient à (Ay) .

G appartient à (Ax) et (d) est la bissectrice de \widehat{xAy} , c'est à dire l'axe de symétrie de \widehat{xAy} .

Donc le symétrique de la droite (Ax) par rapport à (d) est (Ay) .

Donc G' appartient à (Ay) .

2. On démontre que (MG') et (AG') sont perpendiculaires.

On sait que : A, G', M sont les symétriques respectifs de A, G, M par rapport à (d) .

Propriété : Une symétrie axiale transforme un angle en un angle qui lui est égal.

Conclusion : $\widehat{MG'A} = \widehat{MGA} = 90^\circ$

On en déduit que (MG') et (AG') sont perpendiculaires.

Donc (MG') et (Ay) sont perpendiculaires car G' appartient à (Ay) .

3. On justifie que MG' est la distance de (d) à (Ay) .

G' appartient à (Ay) d'une part et (MG') et (Ay) sont perpendiculaires.

G' est donc le pied de la perpendiculaire menée de M à la droite (Ay) .

Donc par définition, MG' est la distance de M à (Ay) .

4. On démontre que $MG = MG'$.

On sait que : M et G' sont les symétriques respectifs de M et G par rapport à (d) .

Propriété : Une symétrie axiale transforme un segment en un segment de même longueur.

Conclusion : $MG = MG'$.

Autrement dit M est équidistant de (Ax) et de (Ay) .

2.3 Théorèmes

On vient de démontrer la propriété suivante :

Propriété :

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des côtés de l'angle.

On admet que la réciproque de cette propriété est vraie.

Propriété :

Si un point est équidistant des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.