Correction du contrôle de mathématiques

Exercice 1

a) f est continue et strictement décroissante sur $[-2;1]$ à valeurs dans $[f(1); f(-2)] = [-0{,}25; 5{,}5]$

Or $3 \in [f(1); f(-2)]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 3$ admet une unique solution $x_0 \in [-2;1]$

b) A l'aide de G_SOLV on obtient $x_0 \simeq -1{,}07$ à 10^{-2} par défaut.

c) $F(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}x + c, \; c \in \mathbb{R}$

Exercice 2.

a) M et $\bar{M}$ réalisent une partition de l'univers Ω

Ainsi, 2 issues réalisent P.

$P = \{P\cap M; P\cap\bar{M}\}$

D'après la formule des probabilités totales

$$p(P) = p(P\cap M) + p(P\cap\bar{M})$$
$$= p(M)\times p_M(P) + p(\bar{M})\times p_{\bar{M}}(P)$$
$$= 0{,}55\times 0{,}7 + 0{,}45\times 0{,}65$$
$$= 0{,}6775$$

b) D'après la formule des probabilités composées

$$P_P(\bar{M}) = \frac{p(\bar{M}\cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}45\times 0{,}67}{0{,}6775} \approx 0{,}4317$$

Exercice 3.

a) (V_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel $q \neq 0$ tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q \times V_n$

Pour tout entier n, on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 20\,000$$
$$= (1{,}015\,U_n - 300) - 20\,000$$
$$= 1{,}015\,(V_n + 20\,000) - 20\,300$$
$$= 1{,}015\,V_n$$

donc (V_n) est géométrique de raison $q = 1{,}015$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 20\,000$
$= -14300$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$V_n = V_0 \times q^n$$
$$= -14\,300 \times 1{,}015^n$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n + 20\,000$
$= 20\,000 - 14\,300 \times 1{,}015^n$

c) on a $q > 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

Par opérations sur les limites $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$