Correction du DST n°7

Exercice 1.

1) $f = w + u \times v$ donc $f' = w' + u'v + uv'$

avec $w : x \mapsto -1{,}5x^2$ $\quad w' : x \mapsto -3x$

$u : x \mapsto x^2$ $\quad u' : x \mapsto 2x$

$v : x \mapsto \ln x$ $\quad v' : x \mapsto \frac{1}{x}$

pour tout $x > 0$, $f'(x) = -3x + 2x\ln x + x$

$= -2x + 2x\ln x$ Réponse b.

2) $n = 900$

$f_{obs} = \frac{86}{900} = 0{,}96$

$I_{C_{95}} = \left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

$= [0{,}926 ; 0{,}994]$

valeur par défaut de $(0{,}9266...)$

valeur par excès $(0{,}9933...)$

Réponse B.

3) $P_{théo} = 0{,}2$

$n = 200$

$I_f = \left[P_{théo} - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; P_{théo} + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$

$= [0{,}144 ; 0{,}256]$

valeur par défaut de $(0{,}14456)$

valeur par excès de $(0{,}255437)$

Réponse D.

4) $f'(x) = 3x^2 - 78x + 315$

$f''(x) = 6x - 78$

Réponse C

x	$-\infty$	13	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	f est concave		f est convexe

inflexion

Exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$U_{n+1} = 0{,}96\, U_n + 300$ et $U_0 = 5000$

on a alors $U_1 = 0{,}96 \times U_0 + 300$

$= 0{,}96 \times 5000 + 300$

$\boxed{U_1 = 5100}$

de même, $U_2 = 0{,}96 \times U_1 + 300$

$= 0{,}96 \times 5100 + 300$

$\boxed{U_2 = 5196}$ donc au 1er janvier 2020 le nombre de pommiers sera de 5196.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 7500$

a) (V_n) est géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times q$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$V_{n+1} = U_{n+1} - 7500$

$= 0{,}96\, U_n + 300 - 7500$

$= 0{,}96\, U_n - 7200$

$= 0{,}96\,(V_n + 7500) - 7200$

$= 0{,}96\, V_n + 7200 - 7200$

$= 0{,}96 \times V_n$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $v_0 = U_0 - 7500$

$= 5000 - 7500$

$v_0 = -2500$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

d'où $\boxed{V_n = -2500 \times 0{,}96^n}$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n + 7500$

d'où $U_n = 7500 - 2500 \times 0{,}96^n$

3. a) $n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 5000$ } initialisation

Tant que $U \leqslant 6000$

$n \leftarrow n+1$

$u \leftarrow 0{,}96 * U + 300$

Fin Tant que

b) à l'aide de la calculatrice on fait fonctionner l'algorithme.

5000 EXE

5000

ANS * 0,96+300 EXE

5100 EXE

5196 EXE ... il faut appuyer 13 fois

sur EXE pour dépasser le seuil de 6000

A la fin de son exécution $n = 13$

Au 1er janvier de l'année 2018+13 soit en 2031

le nombre de pommiers dépassera 6000.

4. Etudions la limite de la suite (U_n).

$-1 < q < 1$

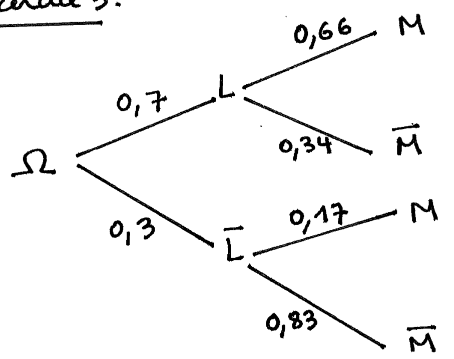
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

par opérations sur les limites on a :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 7500 - 2500 \times 0 = 7500$$

Si l'évolution se poursuit le nombre de pommiers va augmenter mais sans dépasser 7500.

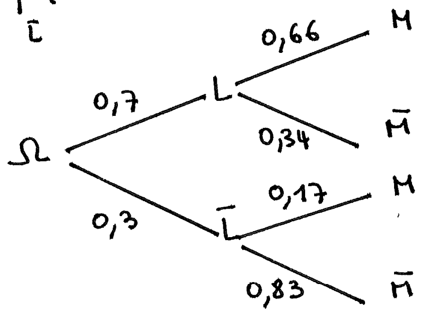
Exercice 3 :



(Organisation de l'information sur le brouillon fourni par le professeur !)

1. $P(L) = 0{,}7$
$P_L(M) = 0{,}66$
$P_{\bar{L}}(\bar{M}) = 0{,}83$
} d'après les données de l'énoncé (aucun calcul à faire !)

2)



3. $L \cap M$: « le cycliste interrogé est licencié dans un club et a réalisé le parcours en moins de 5 heures »

$$\boxed{p(L\cap M) = p(L) \times p_L(M) = 0,7 \times 0,66 = 0,462}$$

4. L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers Ω.

2 issues réalisent M :

$M = \{L\cap M ; \bar{L}\cap M\}$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(M) &= p(L\cap M) + p(\bar{L}\cap M) \\ &= p(L)\times p_L(M) + p(\bar{L})\times p_{\bar{L}}(M) \\ &= 0,7\times 0,66 + 0,3 \times 0,17 \\ &= 0,462 + 0,051 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(M) = 0,513}$$

5. On s'intéresse à la probabilité qu'un cycliste interrogé soit licencié sachant qu'il a fait le parcours en moins de 5 heures.

D'après la formule des probabilités composées :

$$P_M(L) = \frac{p(L\cap M)}{p(M)} = \frac{0,462}{0,513} = 0,90058$$

On a bien $P_M(L) > 90\%$

6. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante : « interroger un cycliste » dont le succès est M : « le cycliste a effectué le parcours en moins de 5 heures » avec $p(M) = 0,513$. On note $p = 0,513$

On répète 10 fois de façon identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli. On a alors un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,513$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue de cette expérience.

$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 10 ; p = 0,513}$

b. $p(X=4) = \binom{10}{4} p^4(1-p)^6 = 210 \times 0,513^4 \times 0,487^6$

$\boxed{p(X=4) = 0,194 \text{ au millième près}}$.

On peut obtenir $p(X=4)$ avec la calculatrice en mode STAT à l'aide de BinomFdP.

c. $p(X \leq 3) = \text{BinomFrep}(10 ; 0,513 ; 3)$

$\boxed{p(X\leq 3) = 0,151 \text{ au millième près}}$.

Exercice 4 : Partie A

1. Par lecture graphique, on conjecture que l'audience journalière de cette chaîne de télévision était en baisse entre 2000 et 2003 et a connu une augmentation à partir de 2003 avec un ralentissement au cours de 2008.

2. Au 1er janvier 2014, le nombre de téléspectateurs est d'environ 800 000.

3. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A d'abscisse 0.

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{82 - 460}{3 - 0} = \frac{-378}{3} = -126$$

Partie B :

1. Pour tout $x \in [0;29]$

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x}$$

Pour $x = 14$ on a donc $f(14) \simeq 803,9$

On peut donc estimer que le nombre de télespectateurs de la chaine le 1er janvier 2014 est d'environ 804000.

2. a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$

avec $u : x \mapsto 20x^2 - 80x + 460$ $\quad u' : x \mapsto 40x - 80$

$v : x \mapsto e^{-0,1x}$ $\quad v' : x \mapsto -0,1e^{-0,1x}$

Pour tout $x \in [0;29]$ on a donc

$$f'(x) = (40x+80)e^{-0,1x} - 0,1(20x^2 - 80x + 460) \times e^{-0,1x}$$
$$= e^{-0,1x}\left[(40x-80) - 0,1(20x^2 - 80x + 460)\right]$$
$$= e^{-0,1x}\left[40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46\right]$$
$$= e^{-0,1x}\left[-2x^2 + 48x - 126\right]$$

b) Le discriminant du trinôme $-2x^2 + 48x - 126$ est

$\Delta = (48)^2 - 4(-2)\times(-126) = 1296$ et $\sqrt{\Delta} = 36$

Les racines sont donc $x_1 = \frac{-48-36}{-4}$ et $x_2 = \frac{-48+36}{-4}$

soit : $x_1 = 21$ et $x_2 = 3$

c. Pour tout $x \in [0;29]$ on a $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$

or pour tout $x \in [0;29]$ $e^{-0,1x} > 0$

donc pour tout $x \in [0;29]$ $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 48x - 126$.

Pour une expression de la forme ax^2+bx+c, le signe du coefficient a est situé à l'extérieur des racines.

Il en résulte le tableau de signes suivant :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les variations de f sur $[0;29]$ se déduisent du signe de sa dérivée f' sur $[0;29]$.

x	0		3		21		29
f	460	↘	$400e^{-0,3} \simeq 296$	↗	$7600e^{-2,1} \simeq 931$	↘	$14960e^{-2,9} \simeq 823$

$f(0) = 460$

$f(3) \simeq 296$

$f(21) \simeq 931$

$f(29) = 823$

d. D'après le tableau de variations f atteint son maximum en $x = 21$ et $f(21) < 1000$ donc la chaine n'atteindra jamais les 1 million de télespectateurs.

3. f est continue et strictement croissante sur $[3;21]$ à valeurs dans $[f(3); f(21)]$

Or $800 \in [f(3); f(21)]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 800$ admet une unique solution $3 < \alpha < 21$

A l'aide de G-SOLV on obtient $13 < \alpha < 14$.

avec $f(13) \simeq 763$ et $f(14) \simeq 804$

Le nombre de 800 000 sera donc atteint à la fin de 2013.

4. F est une primitive de f sur $[0;29]$

$\iff \forall x \in [0;29] \quad F'(x) = f(x)$

$F = u \times v$ donc $F' = u'v + uv'$

avec $u : x \mapsto ax^2+bx+c \qquad u' : x \mapsto 2ax+b$

$v : x \mapsto e^{-0,1x} \qquad v' : x \mapsto -0,1e^{-0,1x}$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = e^{-0,1x}\left[2ax+b-0,1ax^2-0,1bx-0,1c\right]$$

$$= e^{-0,1x}\left[-0,1ax^2+(2a-0,1b)x+b-0,1c\right]$$

$$F'(x) = f(x) \iff \begin{cases} -0,1a = 20 & (L_1) \\ 2a-0,1b = -80 & (L_2) \\ b-0,1c = 460 & (L_3) \end{cases}$$

(L_1) : $-0,1a = 20 \iff a = -200$

(L_2) $2\times(-200)-0,1b = -80$

$\iff 0,1b = -320$

$\iff b = -3200$

(L_3) $-3200-0,1c = 460 \iff 0,1c = -3660$

$\iff c = -36600$

$$\boxed{F : x \mapsto (-200x^2-3200x-36600)e^{-0,1x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [0;29]}$$