101 Déterminer une primitive

1 Pour tout réel x,

$$(ax+a+b)e^{x} = (3x-1)e^{x} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}.$$

2 **a.** $F'(x) = a \times e^{x} + (ax+b) \times e^{x} = (ax+a+b) \times e^{x}$.

b. F est une primitive de $f \Leftrightarrow$ pour tout réel x,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax+a+b)e^{x} = (2x+1)e^{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

3 $F'(x) = a \times e^{-x} + (ax+b) \times (-e^{-x}) = (-ax+a-b) \times e^{-x}$.

F est une primitive de $f \Leftrightarrow$ pour tout réel x,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (-ax+a-b)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ a-b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Donc $F(x) = (-x-1)e^{-x}$.

4 $f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$. En utilisant la question **3**, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que :

$$F(x) = -e^{-x} - (-x-1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

5 On pose $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{x}$.

$$F'(x) = (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx+c)e^{x}$$
$$= (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^{x}.$$

On résout : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}.$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = (x^2-2x+2)e^{x}$.