Correction du devoir de mathématiques n°8

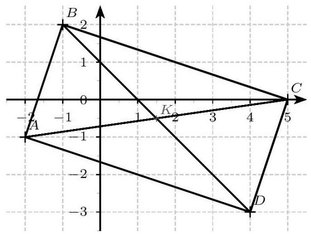
La calculatrice était autorisée.
Le devoir était noté sur 21,5 points et la note finale laissée sur 20.

Exercice 1. (5,5 points)

Dans un repère **orthonormé** $(O\ ;\ I, J)$, on considère les points $A(-2\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ 2)$, et $C(5\ ;\ 0)$.

1. (1 point) Faire une figure à compléter au fil de l'exercice.

Solution: À la fin de l'exercice, on obtient la figure suivante :



2. (1.25 point) On appelle K le milieu du segment $[AC]$. **Placer** ce point, puis **calculer** ses coordonnées.

Solution: K est le milieu de $[AC]$:

$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ Donc $K\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

3. (1.25 points) Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
Placer le point D, puis **déterminer par le calcul** ses coordonnées.

Solution: $ABCD$ est un parallélogramme donc K est aussi le milieu du segment $[BD]$:

$x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{-1+x_D}{2} \Leftrightarrow 3 = -1 + x_D \Leftrightarrow x_D = 4$

$y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{2+y_D}{2} \Leftrightarrow -1 = 2 + y_D \Leftrightarrow y_D = -3$

Donc $D(4\ ;\ -3)$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que D a pour coordonnées $(4\ ;\ -3)$.

4. (2 points) On conjecture que $ABCD$ est un rectangle.

Démontrons que $ABCD$ est un rectangle.

Solution: Calculons les longueurs des diagonales :

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (5-(-2))^2 + (0-(-1))^2 = 7^2 + 1^2 = \sqrt{49+1} = 50$ $\qquad AC = \sqrt{50}$

$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = (4-(-1))^2 + (-3-2)^2 = 5^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$ $\qquad BD = \sqrt{50}$

Dans le parallélogramme ABCD on sait que les diagonales sont de même longueur.
Or, si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
donc $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 2. (8 points)

1. (2 points) Soit f la fonction affine telle que $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$.
Dans un repère, **tracer** la représentation graphique de la fonction f, puis **déterminer** l'expression de f.

Solution:

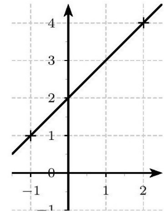
f est une fonction affine, il existe donc $m, p \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

$m = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \dfrac{4-1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \times x + p = x + p$.

$f(-1) = -1 + p \Leftrightarrow 1 = -1 + p \Leftrightarrow p = 2$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.



2. (1 point) **Résoudre** l'inéquation $-4x + 8 \geq 0$.

Solution: $-4x + 8 \geq 0$
$\Leftrightarrow -4x + 8 - 8 \geq 0 - 8$
$\Leftrightarrow -4x \geq -8$
$\Leftrightarrow \dfrac{-4x}{-4} \leq \dfrac{-8}{-4}$ puisqu'on divise par un nombre négatif
$\Leftrightarrow x \leq 2$
Donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;2]$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-4)(-3x+24)$.

(a) (1 point) **Développer** l'expression de $g(x)$.

Solution: $g(x) = x \times (-3x) + x \times 24 + (-4) \times (-3x) + (-4) \times 24 = -3x^2 + 24x + 12x - 96 = -3x^2 + 36x - 96$

(b) (2 points) **Dresser** les tableaux de signes des fonctions h et i définies par $h(x) = x - 4$ et $i(x) = -3x + 24$.

Solution: Tableau de signes de $x + 4$

1. On résout l'équation $h(x) = 0$:
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 4 + 4 = 0 + 4 \Leftrightarrow x = 4$
2. On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signes $h(x)$		$-$	0	$+$	

Tableau de signes de $-3x + 24$

1. On résout l'équation $i(x) = 0$:
$-3x + 24 = 0 \Leftrightarrow -3x + 24 - 24 = 0 - 24 \Leftrightarrow -3x = -24 \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{-24}{-3} \Leftrightarrow x = 8$
2. On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		8		$+\infty$
Signes $i(x)$		$+$	0	$-$	

(c) (1 point) En **déduire** le tableau de signes de la fonction g.

Solution: On refait un tableau de signes avec une ligne pour h, une ligne pour i et une ligne pour le produit de i par h, c'est-à-dire la fonction g :

x	$-\infty$		4		8		$+\infty$
Signes $x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signes $-3x+24$		$+$		$+$	0	$-$	
Signes $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(d) (1 point) En **déduire** les antécédents de 0 par la fonction g et les solutions de l'inéquation $g(x) \geq 0$.

Solution: On lit le tableau de signes de la fonction g et on trouve que :
- les antécédents de 0 par la fonction g sont 4 et 8,
- $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [4;8]$.

Exercice 3 : **3 points**

Lors du deuxième trimestre, un élève a une moyenne de 11 après les quatre premiers contrôles. Tous les contrôles du trimestre ont le même coefficient.

1. (1,5 point) Avec les 4 premiers contrôles il totalise 11 x 4 = 44 points.
   Avec la note de 14 au cinquième contrôle, son total est porté à 58 points.
   Sa nouvelle moyenne est alors $\bar{x} = \frac{58}{5} = 11{,}6$
2. (1,5 point) L'élève obtient une moyenne de 12 grâce à un 6ème contrôle.
   Son total de points est donc 6x12=72. Il avait obtenu 58 points sur 5 contrôles, il a donc obtenu 14 au 6ème contrôle.

Exercice 4 : **5points**

En 2018, on a réalisé une étude statistique sur la durée des communications d'un standard téléphonique. Les durées (en secondes) des communications du standard sont regroupées en classes dans le tableau ci-dessous.

Durée (en secondes)	[30 ;50[	[50 ;70[	[70 ;90[	[90 ;110[	[110 ;130[	[130 ;150[	[150 ;170[
Fréquences en %	4	7	**15**	41	19	11	3
Fréquences cumulées croissantes	**4**	**11**	**26**	**67**	**86**	**97**	**100**

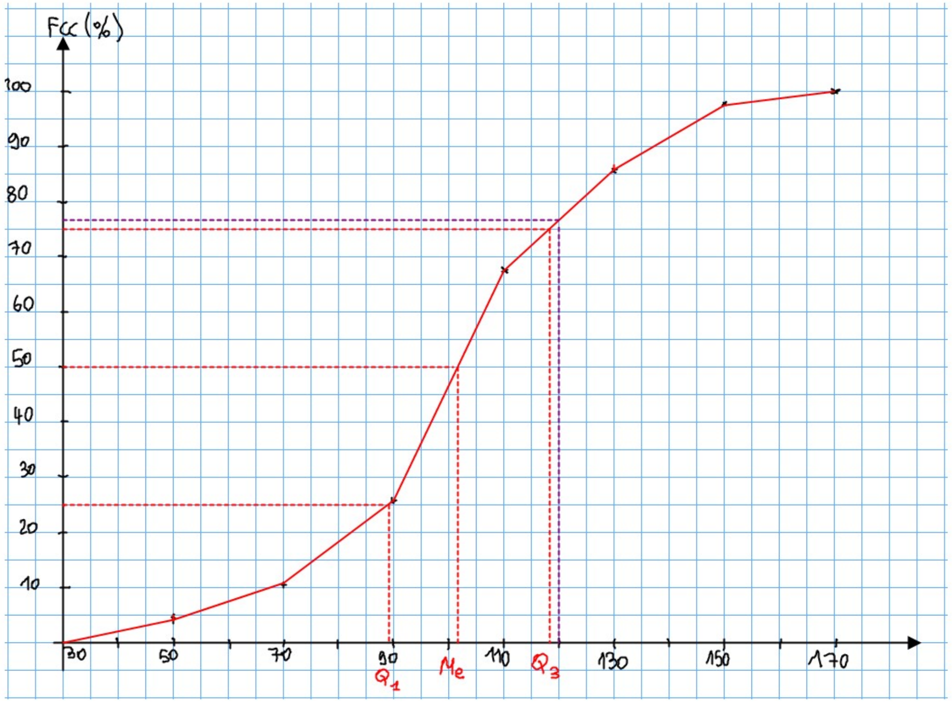
1. (0,75 point) Pour compléter la première ligne du tableau, on effectue la somme des pourcentages : on doit obtenir 100%. On effectue ensuite les sommes successives pour obtenir les FCC.

2. (0,75 point) Pour calculer la durée moyenne d'une communication téléphonique, **on travaille avec les centres de classes**. On peut ensuite compléter des listes dans la calculatrice en mode STAT ou bien poser le calcul :

$$\bar{x} = \frac{4x40 + 7x60 + 15x80 + 41x100 + 19x120 + 11x140 + 3x160}{100} = 101{,}8$$

3 (0,5 point) 26% des communications durent moins d'une minute et demie.

4. (1 point) Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.



5. (1 point) Par lecture graphique, la médiane est 101 ; le premier quartile est 89, le troisième quartile est 118.

6. (1 point) En déterminant l'image de 120 par le polygone, on en déduit qu'environ 77,5% des communications durent moins de 120 secondes soit deux minutes.