DST n°7 TES/L durée 3H00

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ d'expression

$$f(x) = -1,5x^2 + x^2\ln(x).$$

La fonction dérivée de f est donnée pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ par :

a. $f'(x) = -x+1$ **b.** $f'(x) = 2x\ln(x) - 2x$
c. $f'(x) = -3x+2$ **d.** $f'(x) = -x\ln(x) - 0,5x$

2. on considère une entreprise qui produit des plaquettes de beurre de 250 grammes.
Pour être conformes, ces plaquettes de beurre doivent avoir une masse nette comprise entre 248 et 252 grammes.
Un contrôleur prélève au hasard un échantillon de 900 plaquettes et constate que 864 sont conformes.
L'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, de la proportion de plaquettes de beurre conformes est, avec les bornes données à 10^{-3} près :

A. [0,91 ; 1,01]	B. [0,926 ; 0,994]
C. [0,245 ; 0,255]	D. [0,958 ; 0,962]

3. Lors d'une tombola, les organisateurs affirment que 20 % des tickets sont gagnants. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée des tickets gagnants pour un échantillon de 200 tickets tirés au hasard est, avec des valeurs approchées des bornes données à 10^{-3} près :

A. [0,150 ; 0,250]	B. [0,195 ; 0,205]
C. [0,182 ; 0,218]	D. [0,144 ; 0,256]

4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 30] par :

$$f(x) = x^3 - 39x^2 + 315x + 45.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On a alors :

A. f est convexe sur l'intervalle [0 ; 30]
B. f est concave sur l'intervalle [5 ; 21]
C. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 13
D. Si f' désigne la fonction dérivée de f, alors f' est croissante sur l'intervalle [0 ; 5] et sur l'intervalle [21 ; 30]

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2018, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2018+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2020 ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0{,}96^n$.

3. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
On considère l'algorithme ci-dessous

Ligne 1	$n \leftarrow 0$
Ligne 2	$u \leftarrow 5000$
Ligne 3	Tant que ......
Ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
Ligne 5	$\quad u \leftarrow$ ......
Ligne 6	Fin tant que

a. Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.

b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

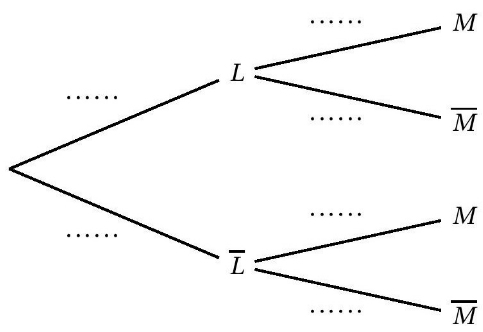
- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures ; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son évènement contraire.

1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



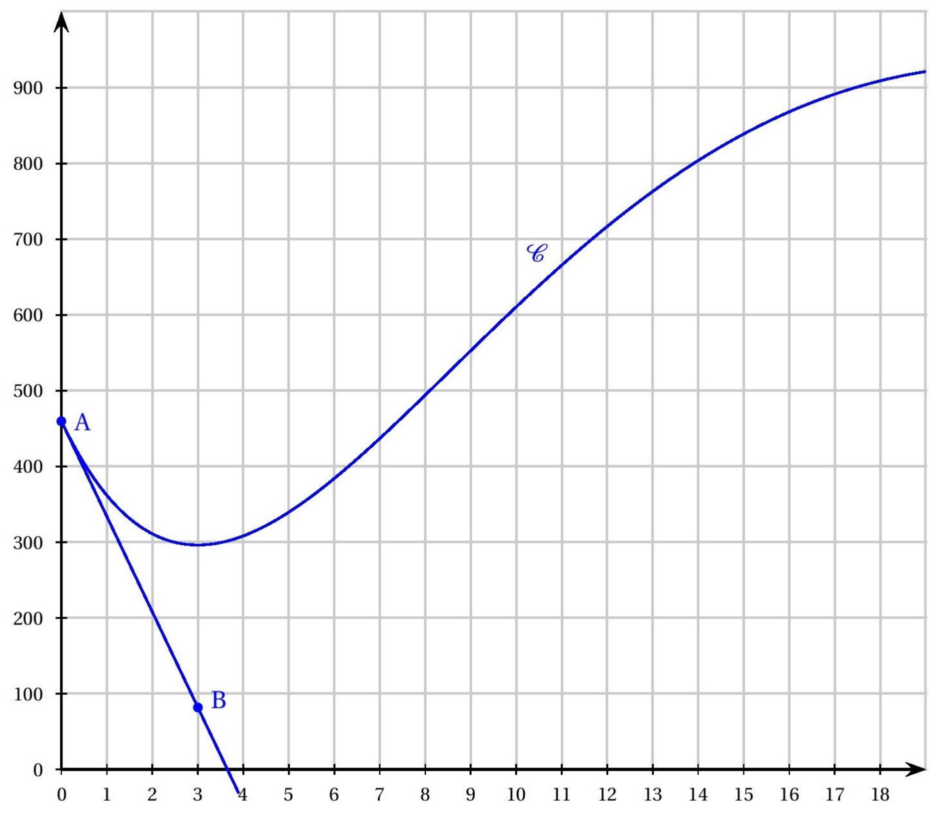
3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.
4. Justifier que $P(M) = 0,513$.
5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.
6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.
   c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures ?

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A (0; 460) et B (3; 82), est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par ($\mathscr{C}$)?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 29]$ par :

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 29]$.
   a. Démontrer que f' est définie par :

   $$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\,\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

   b. On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	**Résultat :**
Solve($-2x^2 + 48x - 126 = 0$)	3 et 21

   Retrouver ce résultat par le calcul.

   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0; 29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

   d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029? Justifier.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3; 21]$.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.
   Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000?
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 29]$ par :

   $$F(x) = (\;a x^2 + bx + c\;)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$$

   Déterminer les réels a, b, c tels que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 29]$.