Chapitre 11 : Lois de probabilité à densité.

Dans tout ce qui suit, les repères sont supposés orthogonaux.

I Loi à densité sur un intervalle.

1. Variable aléatoire continue.

Définition 1:

Une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un intervalle I.

Exemple : Jean attend son bus. Il est certain que son bus arrivera dans moins de 10 minutes.
Soit X son temps d'attente exprimé en minutes.
La variable aléatoire X est continue car elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels de l'intervalle $[0; 10[$.
Par exemple $X = 1{,}3$ signifie que le bus arrive au bout de 1 min et 18 secondes.

2. Fonction de densité sur un intervalle $[a; b]$

Définition 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$,

f est une densité si et seulement si :

- f est continue sur $[a;b]$
- f est positive sur $[a;b]$
- l'aire de la partie du plan délimitée par les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$, C_f et l'axe des abscisses vaut 1 u.a.

  Autrement dit : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

<u>Exemple:</u> Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0;10]$ par $f(x) = 0{,}003x^2$

Montrer que f est une densité.

<u>Solution:</u>

- f est une fonction polynôme définie sur $[0;10]$. Elle est donc dérivable sur $[0;10]$, et donc continue sur $[0;10]$
- Pour tout $x \in [0;10]$ $f(x) \geqslant 0$ par produit de facteurs positifs ou nuls
- $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx = F(10) - F(0) = 1 - 0 = 1$

  avec $F : x \mapsto \dfrac{0{,}003x^3}{3} = 0{,}001x^3$ une primitive de f sur $[0;10]$

  et $F(10) = 0{,}001 \times 10^3 = 10^{-3} \times 10^3 = 10^0 = 1$

  $F(0) = 0$

Les 3 conditions suffisantes sont vérifiées : f est donc une densité sur $[0;10]$.

19 Vrai ou faux ? – Fonctions de densité

Justifier la réponse.

a. La fonction f donnée par $f(x)=\frac{3}{x^2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[-6;6]$.

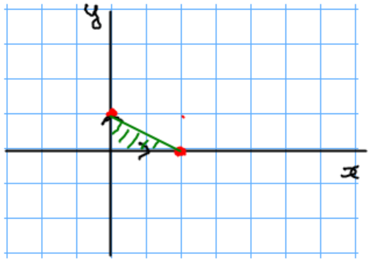
b. La fonction g donnée par $g(x)=1-\frac{x}{2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[0;2]$.

c. La fonction h donnée par $h(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[1;4]$.

Solution :

a. f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas une densité sur $[-6;6]$

b.



$g(x) = -\frac{x}{2}+1$

$mx+p$

$m=-\frac{1}{2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

g est une fonction affine continue et positive sur $[0;2]$

$\int_0^2 g(x)\,dx = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Les 3 conditions suffisantes sont réunies donc g est une densité sur $[0;2]$

c. h est continue et positive sur $[1;4]$

$\int_1^4 h(x)\,dx = H(4)-H(1) = 2-1=1$

avec $H : x \mapsto \sqrt{x}$ est une primitive de h sur $[1;4]$

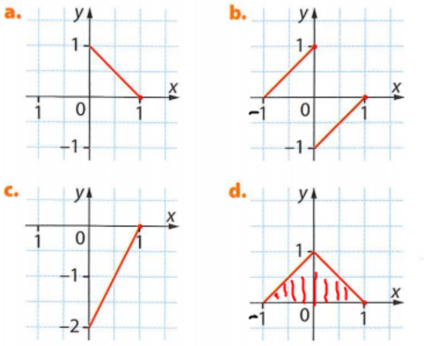
et $H(4)=\sqrt{4}=2$

$H(1)=\sqrt{1}=1$

Les 3 conditions suffisantes sont réunies donc h est une densité sur $[1;4]$.

20 Reconnaître graphiquement une fonction de densité

Parmi les courbes suivantes, indiquer celles qui représentent des fonctions de densité :



a). $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 1$ donc f n'est pas une densité sur $[0;1]$

b) f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas une densité sur $[-1;1]$

c) f est négative sur $[0;1]$ donc f n'est pas une densité sur $[0;1]$

d) f est continue et positive sur $[-1;1]$

de plus $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Les 3 conditions suffisantes sont remplies donc f est une densité sur $[-1;1]$

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

a. Définition 3 :

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $I = [a;b]$

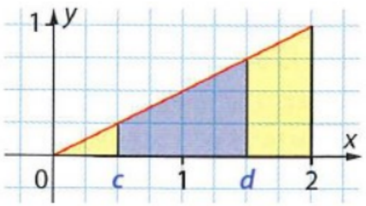
X suit la loi de densité f si :

- Pour tout intervalle $J = [c;d]$ inclus dans I :

  $p(X \in J)$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$

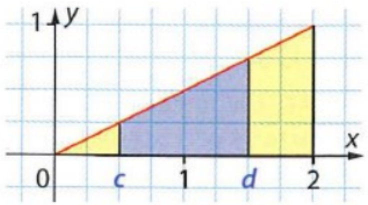
  où $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses pour $X \in J$.

  $p(X \in [c;d]) = p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$.



Remarques:

- $p(X = a) = 0$
- $p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$



Exemple: Chaque jour, Jean prend le bus pour se rendre au lycée.

Il a constaté que son temps d'attente X en minutes suit une loi de densité f définie par

$$f(x) = 0{,}003x^2 \text{ sur } [0; 10]$$

Jean arrive à l'arrêt du bus.

a) Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 7 minutes ?

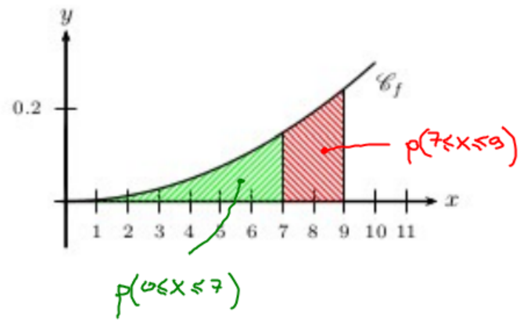
b) Quelle est la probabilité que son temps d'attente soit compris entre 7 et 9 minutes ?

Solution: a) $p(0 \leq X \leq 7) = \int_0^7 f(x)\,dx = F(7) - F(0) = 0{,}001 \times 7^3 = 0{,}343$

La probabilité que Jean attende moins de 7 minutes est 0,343.

b) $p(7 \leq X \leq 9) = \int_7^9 f(x)\,dx = F(9) - F(7) = 0{,}001\left(9^3 - 7^3\right) = 0{,}386$

La probabilité que Jean attende entre 7 et 9 minutes est 0,386.



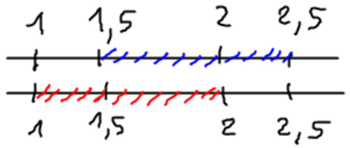
Application :

Énoncé

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par la courbe ci-contre.
Vérifier que l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré est égale à 1.

2. X est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $[0\,;4]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f précédente. Calculer :

a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ **b)** $P(X < 1)$ **c)** $P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5)$



Solution:

1. En unité d'aire, l'aire du triangle isocèle est $\frac{2 \times 0,8}{2} = 0,8$

L'aire du triangle rectangle est $\frac{2 \times 0,2}{2} = 0,2$

Donc l'aire du domaine coloré est $0,8 + 0,2 = 1$.

2\. a) $p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$

b) $p(X < 1) = p(0 \leqslant X \leqslant 1) = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$

c) $$p_{(1 \leqslant x \leqslant 2)}(1,5 \leqslant x \leqslant 2,5) = \frac{p\left[(1,5 \leqslant x \leqslant 2,5) \cap (1 \leqslant x \leqslant 2)\right]}{p(1 \leqslant x \leqslant 2)} = \frac{p(1,5 \leqslant x \leqslant 2)}{p(1 \leqslant x \leqslant 2)} = \frac{\frac{0,5 \times 0,4}{2}}{0,4} = \frac{0,5 \times \cancel{0,4}}{2} \times \frac{1}{\cancel{0,4}} = 0,25.$$

4. Espérance :

Définition 4 :

L'espérance d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ et de densité f est définie par $E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx$

Exemple : Reprendre l'exemple précédent et déterminer l'espérance de X. interpréter.

Solution :

$$E(X) = \int_0^{10} x \times f(x)\, dx = \int_0^{10} x \times 0{,}003x^2\, dx = \int_0^{10} 0{,}003\, x^3\, dx = 0{,}003 \int_0^{10} x^3\, dx = 0{,}003 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$$

$$= 0{,}003\left(\frac{10^4}{4} - 0\right) = 7{,}5$$

Interprétation : sur un très grand nombre de jours, le temps d'attente moyen de Jean tend certainement vers 7 minutes et 30 secondes.