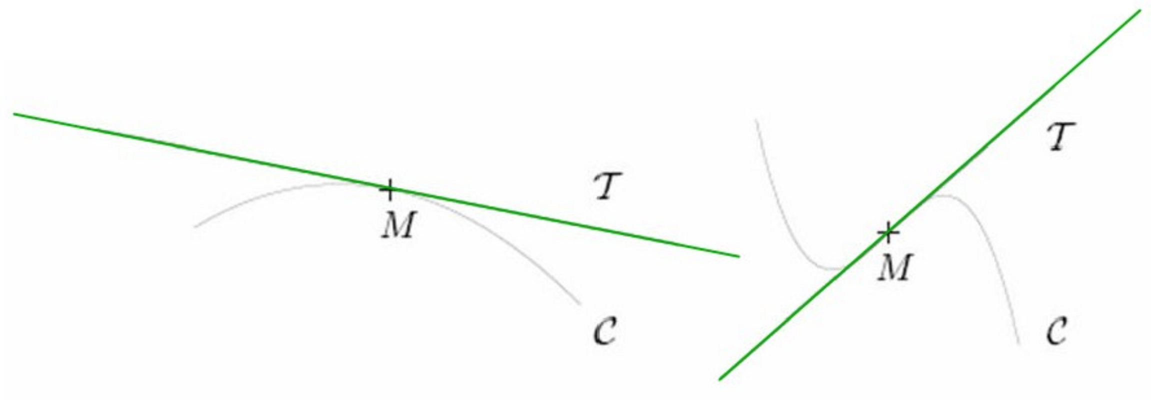
Chapitre 6 : dérivation

I. Coefficient directeur d'une tangente

1) Définition : tangente à une courbe

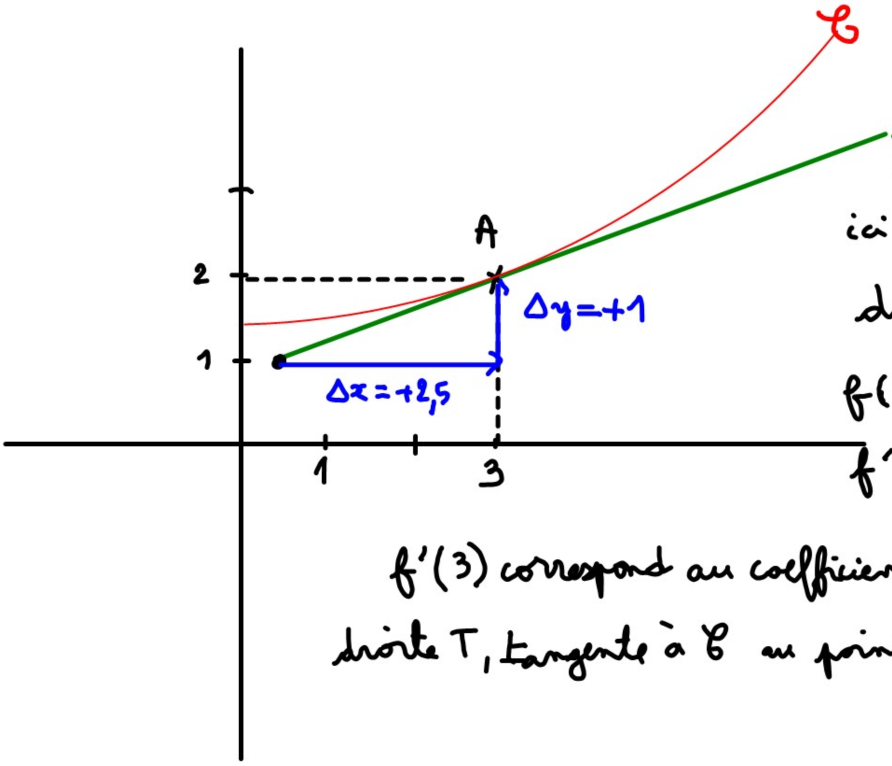
On appelle tangente T à une courbe $\mathscr{C}$ en un point M, si elle existe, la droite qui approche le mieux la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage du point M.

Illustration :



2) Définition : nombre dérivé en un point *A* d'abscisse a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Si la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées en un point A d'abscisse a, alors :
on appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ le coefficient directeur de cette tangente en *A*.



ici $x_A = 3$

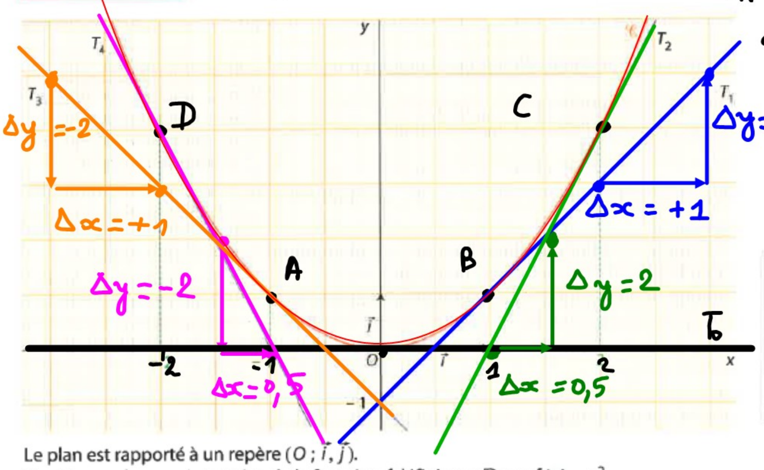
donc $a = 3$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = 0,4$

$f'(3)$ correspond au coefficient directeur de la droite T, tangente à 𝒞 au point A d'abscisse 3

Activité **La tangente et son coefficient directeur**



BON A SAVOIR

On peut lire directement le coefficient directeur a de la droite ou appliquer la formule $a = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$.

→ Voir le chapitre 1.

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
𝒞 est la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$.
T_1, T_2, T_3 et T_4 sont respectivement les tangentes à 𝒞 aux points d'abscisses 1 ; 2 ; – 1 et – 2. L'axe des abscisses est la tangente à 𝒞 au point d'abscisse 0.

1. Déterminer, à l'aide du graphique, les coefficients directeurs des droites T_1, T_2, T_3 et T_4.

2. On note $f'(x_A)$ le coefficient directeur de la tangente à 𝒞 au point d'abscisse x_A.
Déterminer $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(-2)$.

1. on note m_1 ; m_2 ; m_3 ; m_4 les coefficients directeurs respectifs des droites T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_4

$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{0,5} = 4$

$m_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+1} = -2$

$m_4 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+0,5} = -4$

- A est le point d'abscisse -1. T_3 est la tangente en A
  $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de T_3
  $f'(-1) = -2$
- B est le point d'abscisse 1. T_1 est la tangente en B
  $f'(1)$ correspond au coefficient de la droite T_1 tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1.
  $f'(1) = 2$.

2. O est le point d'abscisse 0.
T_0 est la tangente en O.
La tangente est horizontale : son coefficient directeur est donc nul.
$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_0, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O d'abscisse 0.
$f(0) = 0$.

- C est le point d'abscisse 2. T_2 est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en C.
  $f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_2, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 2. $f'(2) = 4$.

- D est le point d'abscisse -2. T_4 est la tangente en D
  $f'(-2)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_4, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point D d'abscisse -2. $f'(-2) = -4$

3) Equation réduite d'une tangente

Soit f une fonction dérivable en un réel a et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point *A* d'abscisse a a pour équation réduite :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Preuve :

La tangente *T* admet une équation réduite de la forme :

$y = mx + p$ avec $m = f'(a)$

Le point *A* appartient à la courbe $\mathscr{C}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe : $A(a; f(a))$

De plus le point *A* appartient à la droite *T* donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite *T* .

On a donc $y_A = mx_A + p$

$\Leftrightarrow f(a) = f'(a) \times a + p$

$\Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$

On a $m = f'(a)$ et $p = f(a) - f'(a) \times a$

L'équation de la droite *T* est donc :

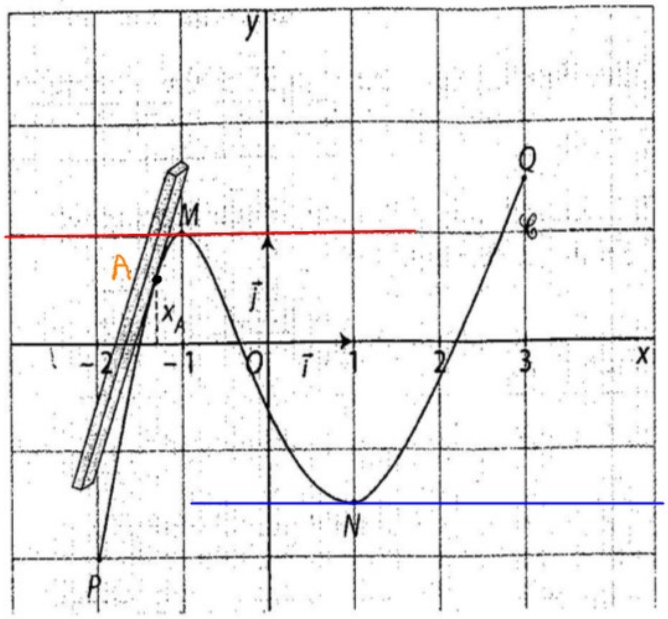
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$

Soit : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

II. Sens de variation et signe du nombre dérivé

1) Activité : surf sur une courbe :

On donne, ci-contre, un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
En chacun des points M et N d'abscisses respectives -1 et 1, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Donner les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Placer sur le graphique une règle matérialisant une tangente à la courbe $\mathscr{C}$, en un point d'abscisse x_A, situé entre P et M.
Quel est le signe du coefficient directeur de cette tangente ?
En déduire le signe de $f'(x_A)$.

4. Reprendre la question 3 pour un point de $\mathscr{C}$ situé entre M et N, puis pour un point de $\mathscr{C}$ situé entre N et Q.

5. « Parcourir » avec la règle toute la courbe, de P à Q, pour compléter la ligne « signe de $f'(x)$ » du tableau de variation.

x	-2		-1		1		3
sens de variation de f	-2	↗	1	↘	$-1,5$	↗	$1,5$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement croissante ? Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement décroissante ?

Correction

1. f ' (-1) correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse -1.

Or la tangente à $\mathscr{C}$ en M est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$.

f ' (1) correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point N d'abscisse 1.

Or la tangente à $\mathscr{C}$ en N est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$

3 . Pour tout point A situé entre P et M, la tangente à $\mathscr{C}$ en A est une droite qui monte, donc son coefficient directeur est positif. donc $f'(x_A) > 0$

4 . Pour tout point A situé entre M et N, la tangente à $\mathscr{C}$ en A est une droite qui descend, donc son coefficient directeur est négatif. donc $f'(x_A) < 0$

5. f ' (x) >0 (resp. f ' (x) < 0) pour tout x appartenant à un intervalle sur lequel f est strictement croissante (resp. décroissante).

2) Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
Les variations de f sur I se déduisent du signe de sa dérivée $f\,'$ sur I.

- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est croissante sur I.

Applications

Application 1

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-1\,;7]$:

x	-1		1		2		4		7
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0

Préciser, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-1\,;7]$, le signe de $f'(x)$.

Application 2

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;5]$ par

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x - 1.$$

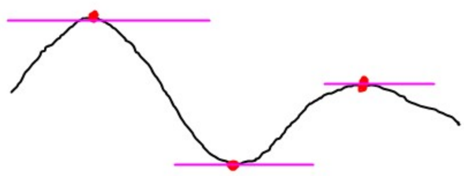
1. Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2. Déterminer, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-4\,;5]$, le signe de $f'(x)$.

Solution : application 1

Le signe de $f'(x)$ sur $[-1; 7]$ se déduit des variations de f sur $[-1; 7]$

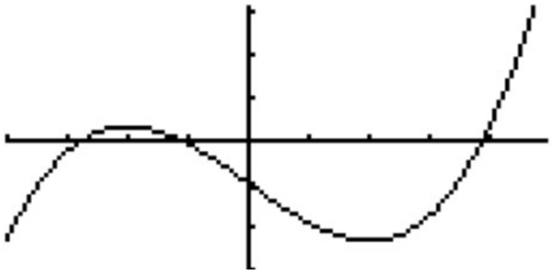
x	-1		1		2		4		7
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	



Solution : application 2

Le signe de $f'(x)$ sur $[-4;5]$ se déduit des variations de f sur $[-4;5]$

x	-4		-2		2		5
$f(x)$	$-\frac{7}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{7}{3}$	$\nearrow$	$\frac{53}{12}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



3) Nombre dérivé des fonctions usuelles

On admet les résultats suivants :

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$
• **constante**, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto c$	0
• **identité**, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$	1
• affine, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax+b$	a
• carré, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2$	$2x$
• cube, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^3$	$3x^2$
• inverse, définie sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$: $x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
• racine carrée, définie sur $[0\,;+\infty[$: $x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x>0$
• trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax^2+bx+c$; $a \neq 0$	$2ax+b$

Exemple :

Si f est la fonction telle que $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$,
$f'(-1)=3\times(-1)^2=3$.
Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est 3.

III. Fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

1) Définitions :

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

où a, b, c, d sont quatre réels tels que $a \neq 0$.
On appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x)=2x^3-3x^2+5x-1$.

Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :
On fait tomber l'exposant, puis on le diminue d'une unité. La dérivée de x est égale à 1 et la dérivée d'une constante est nulle :

$$f(x)= \quad 2x^{\cancel{3}\,2} \quad -3x^{\cancel{2}} \quad +5\cancel{x} \quad \cancel{-1}$$

$$f'(x)=2\times 3x^2 \quad -3\times 2x \quad +5$$

Exemples : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$ c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$
d) $k(x)=-x^3+x^2+1$ e) $l(x)=-4x^3+1$ f) $m(x)=-x^3+7x$

solution :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ donc $f'(x)=3\times x^2-3\times 2x+2=3x^2-6x+2$

b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$ donc $g'(x)=5\times 3x^2+2\times 2x+2=15x^2+4x+2$

c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$ donc $h'(x)=-2\times 3x^2-3\times 2x-7=-6x^2-6x-7$

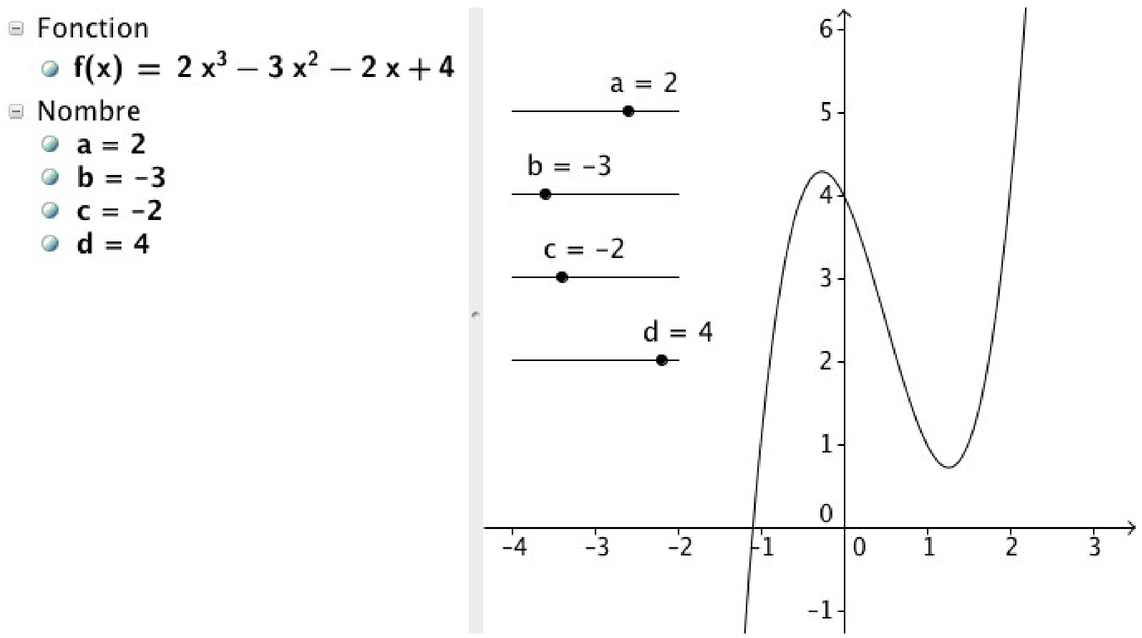
d) $k(x)=-x^3+x^2+1$ donc $k'(x)=-3x^2+2x$
e) $l(x)=-4x^3+1$ donc $l'(x)=-4\times 3x^2=-12x^2$

f) $m(x)=-x^3+7x$ donc $m'(x)=-3\times x^2+7=-3x^2+7$

2) Variations d'une fonction polynôme du troisième degré

a) Observation sur quelques exemples

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on observe les variations de quelques fonctions polynômes du troisième degré.



b) Etude des variations à l'aide de la fonction dérivée

Théorème (rappel) : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
Les variations de f sur I se déduisent du signe de sa dérivée f' sur I.

- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo #1 sur EDPuzzle **https://youtu.be/Ktc-PThiP6I**

EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) a) Calculer la fonction dérivée de f.
   b) Démontrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

Solution :

1) a) Pour tout x réel, on a : $f'(x)=3x^2+\frac{9}{2}\times 2x-12=3x^2+9x-12$.

b) Pour tout réel x, on a : $3(x+4)(x-1)$

$$\begin{aligned} 3(x+4)(x-1) &= (3x+12)(x-1) \\ &= 3x^2-3x+12x-12 \\ &= 3x^2+9x-12 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:

Pour tout réel x, on a :

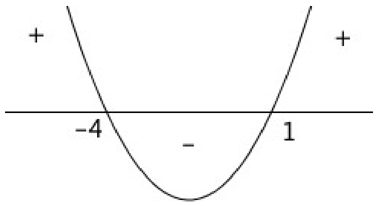
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x+4)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+4)=0$ ou $(x-1)=0$ d'après la règle du produit nul

$\Leftrightarrow x=-4$ ou $x=1$

Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée vers le haut (sens « cuvette »).

On a donc la configuration suivante qui permet de déduire que la dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -4 et 1.

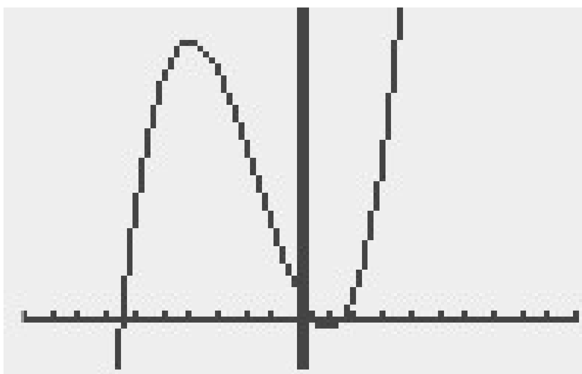


3) Les variations de f sur $\mathbb{R}$ se déduisent du signe de sa dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		$\nearrow$	61	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

$f(-4)=(-4)^3+\frac{9}{2}(-4)^2-12\times(-4)+5=61$ et $f(1)=1^3+\frac{9}{2}\times 1^2-12\times 1+5=-\frac{3}{2}$.

4)



Remarque : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré à l'aide de la dérivée.

Vidéo #2 EDPuzzle

Vidéo #3 EDPuzzle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

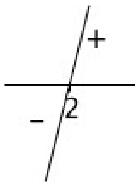
1) Pour tout réel x, on a : $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$
donc pour tout réel x : $f'(x) = 2 \times 2x - 8$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x = 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

Remarque : justification du tableau de signe de $f'(x)$
La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur est m= 4 . On a m positif.
La fonction f' est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).



3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème : les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée f' .

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘	-7	↗	

$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

La fonction f admet un minimum égal à –7 en $x = 2$.