Chapitre 11 : Lois de probabilité à densité.

Dans tout ce qui suit, les repères sont supposés orthogonaux.

I Loi à densité sur un intervalle.

1. Variable aléatoire continue.

Définition 1:

Une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un intervalle I.

Exemple : Jean attend son bus. Il est certain que son bus arrivera dans moins de 10 minutes.

Soit X son temps d'attente exprimé en minutes.

La variable aléatoire X est continue car elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels de l'intervalle $[0;10[$.

Par exemple $X = 1{,}3$ signifie que le bus arrive au bout de 1 min et 18 secondes.

2. Fonction de densité sur un intervalle $[a;b]$

Définition 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$,

f est une densité si et seulement si :

- f est continue sur $[a;b]$
- f est positive sur $[a;b]$
- l'aire de la partie du plan délimitée par les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$, $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut 1 ua.

Autrement dit : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

Exemple : Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0;10]$ par $f(x) = 0{,}003x^2$

Montrer que f est une densité.

Solution :

- f est une fonction polynôme définie sur $[0;10]$. Elle est donc dérivable sur $[0;10]$, et donc continue sur $[0;10]$
- Pour tout $x \in [0;10]$ $f(x) \geqslant 0$ par produit de facteurs positifs ou nuls
- $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx = F(10) - F(0) = 1 - 0 = 1$

avec $F : x \mapsto \dfrac{0{,}003x^3}{3} = 0{,}001x^3$ une primitive de f sur $[0;10]$

et $F(10) = 0{,}001 \times 10^3 = 10^{-3} \times 10^3 = 10^0 = 1$

$F(0) = 0$

Les 3 conditions suffisantes sont vérifiées : f est donc une densité sur $[0;10]$.

19 Vrai ou faux ? – Fonctions de densité

Justifier la réponse.

a. La fonction f donnée par $f(x)=\frac{3}{x^2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[-6\,;6]$.

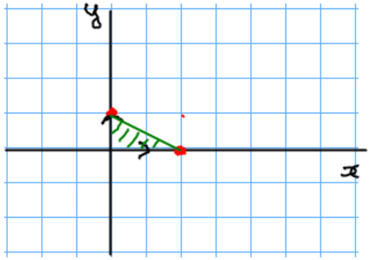
b. La fonction g donnée par $g(x)=1-\frac{x}{2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. La fonction h donnée par $h(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[1\,;4]$.

<u>Solution :</u>

a. f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas une densité sur $[-6;6]$

b.



$g(x) = -\frac{x}{2}+1$

$mx+p$

$m = -\frac{1}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

g est une fonction affine continue et positive sur $[0;2]$

$\int_0^2 g(x)\,dx = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Les 3 conditions suffisantes sont réunies donc g est une densité sur $[0;2]$

c. h est continue et positive sur $[1;4]$

$\int_1^4 h(x)\,dx = H(4)-H(1) = 2-1 = 1$

avec $H : x \mapsto \sqrt{x}$ est une primitive de h sur $[1;4]$

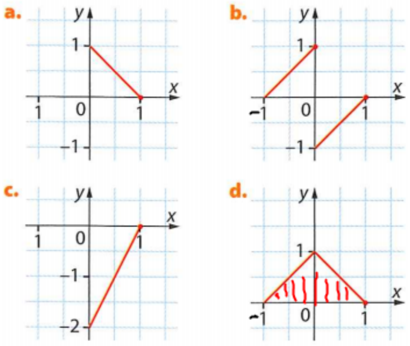
et $H(4)=\sqrt{4}=2$

$H(1)=\sqrt{1}=1$

Les 3 conditions suffisantes sont réunies donc h est une densité sur $[1;4]$.

20 Reconnaître graphiquement une fonction de densité

Parmi les courbes suivantes, indiquer celles qui représentent des fonctions de densité :



a). $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 1$ donc f n'est pas une densité sur $[0;1]$

b) f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas une densité sur $[-1;1]$

c) f est négative sur $[0;1]$ donc f n'est pas une densité sur $[0;1]$

d) f est continue et positive sur $[-1;1]$

de plus $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Les 3 conditions suffisantes sont remplies donc f est une densité sur $[-1;1]$

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

a. Définition 3 :

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $I = [a;b]$

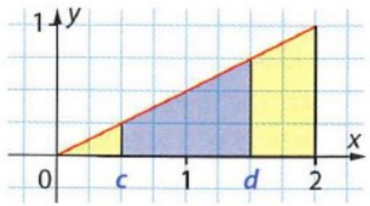
X suit la loi de densité f si :

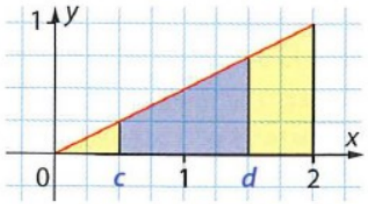
- Pour tout intervalle $J = [c;d]$ inclus dans I :

  $p(X \in J)$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$

  où $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses pour $X \in J$.

  $p(X \in [c;d]) = p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$.





Remarques:

- $p(X = a) = 0$
- $p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$

Exemple: Chaque jour, Jean prend le bus pour se rendre au lycée.

Il a constaté que son temps d'attente X en minutes suit une loi de densité f définie par

$$f(x) = 0{,}003x^2 \text{ sur } [0; 10]$$

Jean arrive à l'arrêt du bus.

a) Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 7 minutes ?

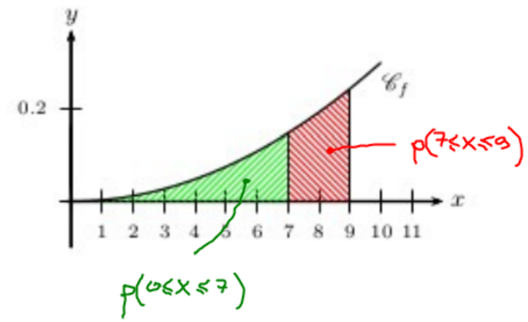
b) Quelle est la probabilité que son temps d'attente soit compris entre 7 et 9 minutes ?

Solution: a) $p(0 \leq X \leq 7) = \int_0^7 f(x)\,dx = F(7) - F(0) = 0{,}001 \times 7^3 = 0{,}343$

La probabilité que Jean attende moins de 7 minutes est 0,343.

b) $p(7 \leq X \leq 9) = \int_7^9 f(x)\,dx = F(9) - F(7) = 0{,}001\,(9^3 - 7^3) = 0{,}386$

La probabilité que Jean attende entre 7 et 9 minutes est 0,386.



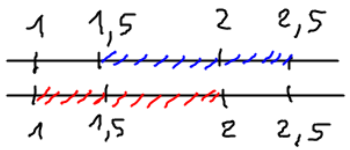
Application :

Énoncé

1. *f* est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par la courbe ci-contre. Vérifier que l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré est égale à 1.

2. X est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle [0 ; 4] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction *f* précédente. Calculer :

a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ **b)** $P(X < 1)$ **c)** $P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5)$



Solution :

1. En unité d'aire, l'aire du triangle isocèle est $\frac{2 \times 0,8}{2} = 0,8$

L'aire du triangle rectangle est $\frac{2 \times 0,2}{2} = 0,2$

Donc l'aire du domaine coloré est $0,8 + 0,2 = 1$.

2 . a) $p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$

b) $p(X < 1) = p(0 \leqslant X \leqslant 1) = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$

c) $p_{(1 \leqslant x \leqslant 2)}(1,5 \leqslant x \leqslant 2,5) = \frac{p[(1,5 \leqslant x \leqslant 2,5) \cap (1 \leqslant x \leqslant 2)]}{p(1 \leqslant x \leqslant 2)} = \frac{p(1,5 \leqslant x \leqslant 2)}{p(1 \leqslant x \leqslant 2)} = \frac{\frac{0,5 \times 0,4}{2}}{0,4} = \frac{0,5 \times \cancel{0,4}}{2} \times \frac{1}{\cancel{0,4}} = 0,25$.

4. Espérance :

Définition 4 :

L'espérance d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ et de densité f est définie par $E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$

Exemple : Reprendre l'exemple précédent et déterminer l'espérance de X. interpréter.

Solution : $E(X) = \int_0^{10} x \times f(x)\,dx = \int_0^{10} x \times 0{,}003x^2\,dx = \int_0^{10} 0{,}003\,x^3\,dx = 0{,}003 \int_0^{10} x^3\,dx = 0{,}003 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$

$= 0{,}003\left(\frac{10^4}{4} - 0\right) = 7{,}5$

Interprétation : sur un très grand nombre de jours, le temps d'attente moyen de Jean tend certainement vers 7 minutes et 30 secondes.

21 Créer une fonction de densité

Déterminer le nombre k afin que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k(2 - 2x)$, soit une fonction de densité sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$f : x \mapsto k(2-2x)$ est continue sur $[-2;2]$ $\quad k' = 0,8$

f est une fonction de densité sur $[-2;2]$ si et seulement si

a) • pour tout $x \in [-2;2]$ $f(x) \geqslant 0$

b) • $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 1$

a) Pour tout $x \in [-2;2]$ $f(x) \geqslant 0 \iff k(2-2x) \geqslant 0$

$\iff -2kx + 2k \geqslant 0$

$-2kx + 2k = 0 \iff k = 0$ ou $x = 1$

x	-2	1	2
$(2-2x)$	$+$	0	$-$
$k<0$ $k(2-2x)$	$-$	0	$+$
$k>0$ $k(2-2x)$	$+$	0	$-$

f est une densité sur $[-2;2] \iff \begin{cases} \overset{x}{9k} - \overset{y}{k'} = 1 \\ k>0 \\ k'<0 \end{cases}$ par exemple. $k = 0,1$ $k' = -0,1$

$0 < k < \frac{1}{9}$

$\forall k \in \mathbb{R}$ f n'est pas de signe constant sur $[-2;2]$

Donc f ne peut être une densité sur $[-2;2]$.

En revanche on peut définir f par morceaux

avec $k > 0$ sur $[-2;1]$

$k' < 0$ sur $[1;2]$

$\begin{cases} f(x) = k(2-2x) \text{ pour tout } x \in [-2;1] & k>0 \\ f(x) = k'(2-2x) \text{ pour tout } x \in [1;2] & k'<0 \end{cases}$

f est continue en 1.

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$\displaystyle = k\int_{-2}^{1}(2-2x)\,dx + k'\int_{1}^{2}(2-2x)\,dx$

Posons $G : x \mapsto 2x - x^2$ une primitive de $x \mapsto 2-2x$ sur $[-2;2]$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) = k\big[G(x)\big]_{-2}^{1} + k'\big[G(x)\big]_{1}^{2}$

$= k\big(G(1) - G(-2)\big) + k'\big(G(2) - G(1)\big)$

$= 9k - k'$

avec $G(1) = 1$
$G(2) = 0$
$G(-2) = -8$

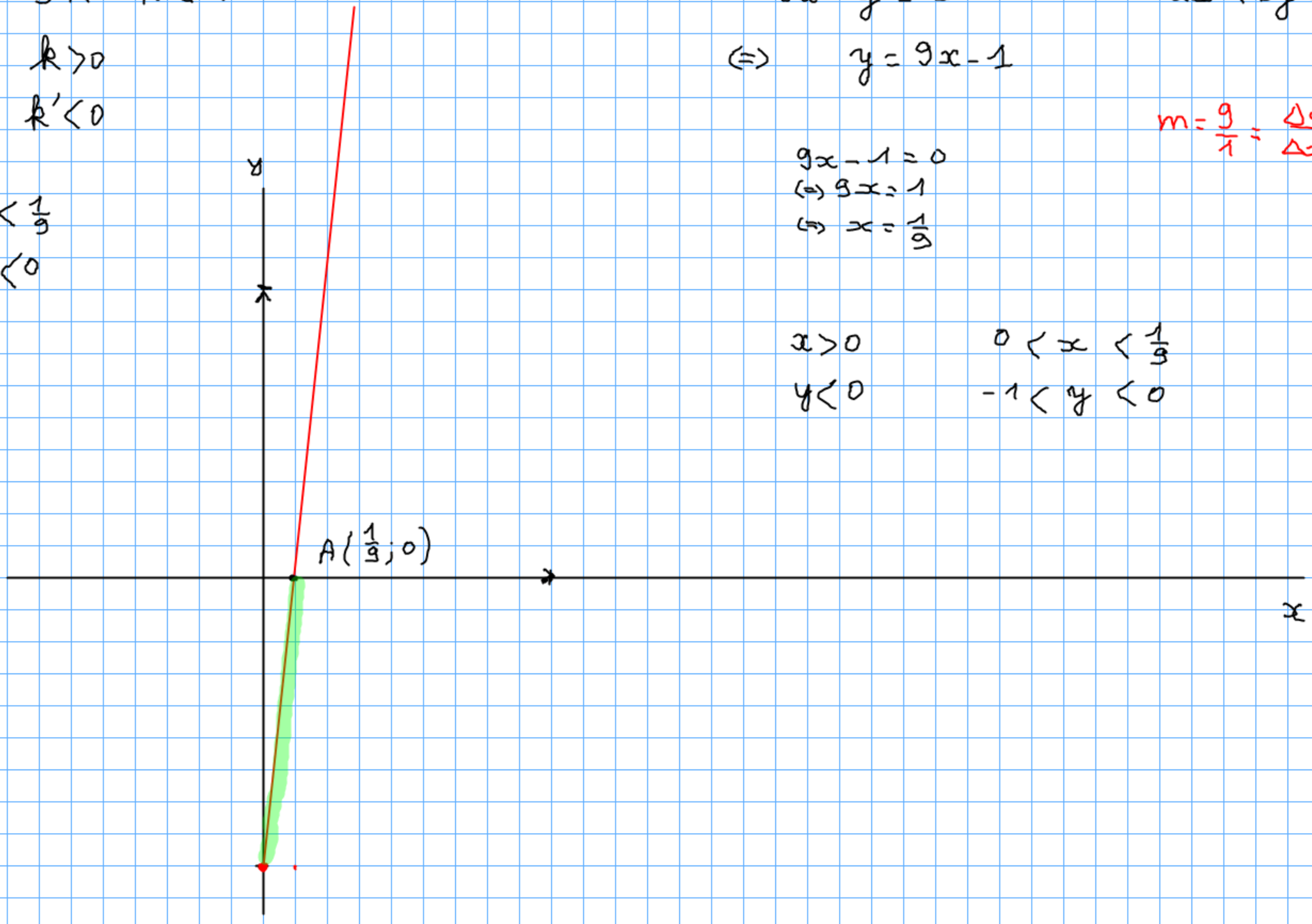
$9k - k' = 1$

$k > 0$

$k' < 0$

$0 < k < \frac{1}{9}$

$-1 < k' < 0$



$9x - y = 1$

$\Leftrightarrow \quad y = 9x - 1$

$ax + by = c$

$m = \frac{9}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$9x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

$x > 0$

$y < 0$

$0 < x < \frac{1}{9}$

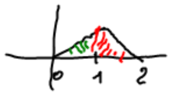
$-1 < y < 0$

22 Fonction de densité définie par intervalle

1 a. Montrer que la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=x$ et sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x)=2-x$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.

b. Soit X la variable aléatoire de densité f.
Calculer la probabilité $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

2 Mêmes questions pour la fonction f définie :



- sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=\frac{1}{2}$;
- sur l'intervalle $[1;3]$ par $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{x}{4}$.

b) $p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[2x - x^2\right]_1^2$

$= p(0 \leqslant X \leqslant 2) - p(0 \leqslant X \leqslant 1)$

$= 1 - p(0 \leqslant X \leqslant 1)$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

1.a) f est définie par morceaux :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{pour tout } x \in [0;1] \\ f(x) = 2-x & \text{pour tout } x \in [1;2] \end{cases}$$

f est continue sur $[0;1]$

f est continue sur $[1;2]$

De plus $f(1) = 1 = 2-1 = 1$ donc f est continue en 1.

x	0		1
x		+	

x	1		2
$2-x$		+	0

$2-x$

$-x+2$

$ax+b$

Pour tout $x \in [0;2]$ $f(x) \geqslant 0$.

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \frac{1}{2} + 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$

22 Fonction de densité définie par intervalle

1 a. Montrer que la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=x$ et sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x)=2-x$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.

b. Soit X la variable aléatoire de densité f.
Calculer la probabilité $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

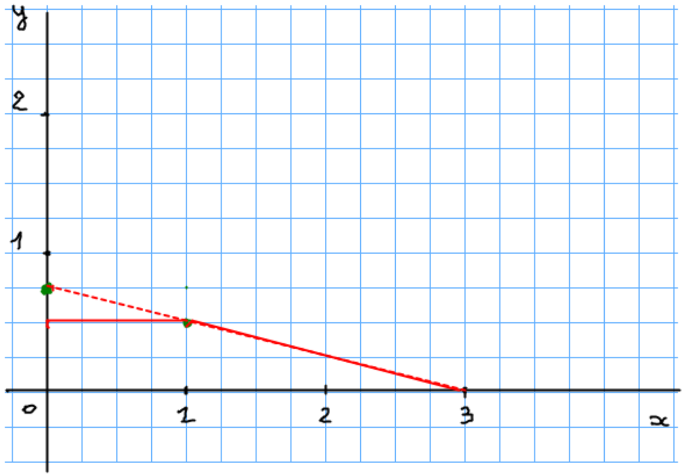
2 Mêmes questions pour la fonction f définie :

- sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=\frac{1}{2}$;
- sur l'intervalle $[1;3]$ par $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{x}{4}$. $= -\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$

$= -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

$m = -\frac{1}{4} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

2) f est définie par morceaux. $f(1) = \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ donc f est continue en 1 et par conséquent continue sur $[0;3]$



f est continue et positive sur $[0;3]$

$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1+3}{2} \times \frac{1}{2}$ à l'aide de la formule de l'aire d'un trapèze.

$= 1$

donc f est une densité sur $[0;3]$

II Loi uniforme

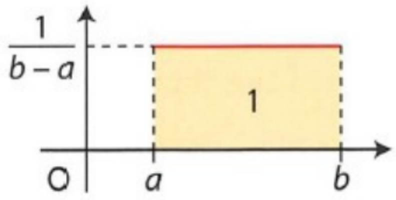
1. Définition 5

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

La variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ si elle admet une densité f définie sur $\mathbb{R}$

par :

- $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$
- $f(x) = 0$ si $x \notin [a;b]$

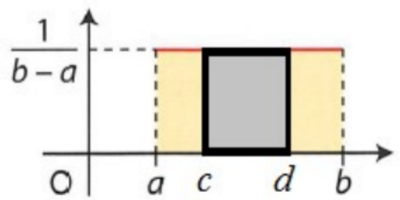


2. Propriété

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$

Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$ on a :

$$p(X \in [c;d]) = p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$



Preuve : $p(X \in [c;d])$ correspond à l'aire du rectangle gris de largeur $d-c$ et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$

Application :

$2,25 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

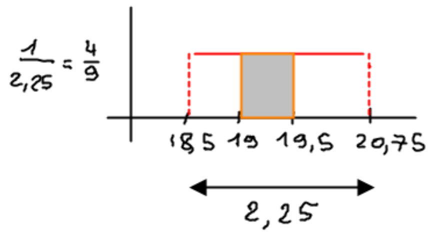
Énoncé

Gaëlle doit passer voir Leslie à un moment quelconque entre 18 h 30 et 20 h 45.

1. Quelle est la probabilité qu'elle arrive :

a) entre 19 h et 19 h 30 ? **b)** avant 19 h 30 ? **c)** exactement à 19 h 15 ?

2. On sait qu'elle est arrivée avant 19 h 30. Quelle est la probabilité qu'elle soit arrivée après 19 h ?



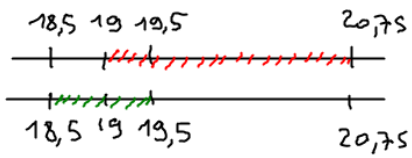
Solution :

1. On note X la variable qui donne l'heure d'arrivée de Gaëlle chez Leslie.

X suit la loi uniforme sur $[18,5 ; 20,75]$

a) $p(19 \leq X \leq 19,5) = \dfrac{19,5 - 19}{20,75 - 18,5} = \dfrac{0,5}{2,25} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

b) $p(18,5 \leq X \leq 19,5) = \dfrac{19,5 - 18,5}{20,75 - 18,5} = \dfrac{4}{9}$



c) $p(X = 19,25) = 0$

2. $p_{(18,5 \leq X \leq 19,5)}(19 \leq X \leq 20,75) = \dfrac{p\left[(19 \leq X \leq 20,75) \cap (18,5 \leq X \leq 19,5)\right]}{p(18,5 \leq X \leq 19,5)} = \dfrac{p(19 \leq X \leq 19,5)}{p(18,5 \leq X \leq 19,5)} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

3. Espérance d'une loi uniforme

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire uniforme X à valeurs dans $[a;b]$ est définie par

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Preuve :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \left[x \times \frac{1}{b-a}\right] dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}} \times \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

Exemple : On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[13;23]$

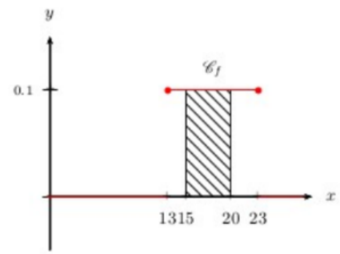
1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne la valeur du nombre choisi ?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre soit compris entre 15 et 20 ?
3. Représenter la densité f et faire apparaître sur le graphique la valeur trouvée à la question 2.
4. Sur un très grand nombre d'expériences vers quel réel tend, en moyenne la valeur du nombre choisi ?

Solution :

1. X suit une loi uniforme sur $[13;23]$ de densité $f(x) = \dfrac{1}{23-13} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

2. $p(15 \leq X \leq 20) = \dfrac{20-15}{23-13} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$

3. Voir ci-contre.



4. Sur un très grand nombre d'expériences, la valeur moyenne du nombre choisi tend vers $E(x) = \dfrac{13+23}{2} = 18$