Chapitre 1

SUITES NUMÉRIQUES

UN NÉNUPHAR double de surface chaque jour. Au 30e jour, il occupe toute la surface d'un étang. Lors de quel jour le nénuphar occupait-il le quart de la surface de l'étang ? On peut modéliser ce problème à l'aide d'une suite pour le résoudre. En raisonnant : si le nénuphar double de taille chaque jour, alors la veille d'occuper toute la surface de l'étang il en occupait la moitié (le 29e jour), et ainsi l'avant-veille (le 28e jour) : le quart !

LES INDISPENSABLES DU CHAPITRE

Ce que vous devez savoir faire à la fin de ce chapitre	Capacités	Exercices d'application
Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.	1	1 à 6
Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.	2	7 à 10
Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.	3 et 4	11 à 28
Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.	5	29 à 50
Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.	6	51 à 55
Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.	7	56 à 64

MISE EN ROUTE

À SAVOIR pour comprendre le chapitre

Pourcentages

Dire que y représente t % de x signifie que $y = \frac{t}{100}x$.

La connaissance de deux des nombres x, y, t permet alors de calculer le troisième.

▶ Exemples

- 20 représente 50 % de 40 car $20 = \frac{50}{100} \times 40$.
- 15 représente 25 % de 60 car $15 = \frac{25}{100} \times 60$.
- 2 représente 1 % de 200 car $2 = \frac{1}{100} \times 200$.
- 40 représente 125 % de 32 car $40 = \frac{125}{100} \times 32$.
- x et y étant deux nombres positifs, si y représente t % de x, alors :

$t > 100$ équivaut à $y > x$.
$t < 100$ équivaut à $y < x$.

Évolution et pourcentage

Une grandeur passe de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1. On dit que cette grandeur a augmenté de t % (où $t > 0$) si $x_1 = x_0 + \frac{t}{100}x_0$, c'est-à-dire, en mettant x_0 en facteur, $x_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right)x_0$.

▶ Exemples

Un capital C augmente de 5 %. Alors le nouveau capital est égal à $\left(1 + \frac{5}{100}\right)$C, c'est-à-dire 1,05C.

QUESTIONS-TESTS

1 Dans un village de 2 500 habitants, 20 % d'entre eux pratiquent régulièrement du sport.
Quel est le nombre d'habitants de ce village qui pratiquent régulièrement du sport ?

2 Dans un lycée de 1 200 élèves, 420 sont internes.
Quel est le pourcentage d'élèves internes dans ce lycée ?

3 Le lendemain d'un jour d'élection, on peut lire dans un quotidien régional : « 1 695 personnes ont pris part au vote, c'est-à-dire 75 % des inscrits sur les listes électorales ».
Calculer le nombre d'inscrits sur les listes électorales.

4 En 2019, le nombre de voitures fabriquées dans un pays a augmenté de 11 % par rapport à 2018.
Notons v_0 le nombre de voitures fabriquées en 2018, et v_1 en 2019.
Expliquer pourquoi $v_1 = 1{,}11v_0$.

5 Un capital augmente de 10 % chaque année. On sait que la valeur de ce capital est de 10 000 € en 2019.
a. Quelle sera sa valeur en 2020 ?
b. Quelle sera sa valeur en 2021 ?

6 Dire si la propriété (P) suivante est vraie ou fausse, en justifiant sa réponse.
(P) Si une quantité augmente de 10 % puis diminue de 10 %, alors elle reprend sa valeur initiale.

1. QU'EST-CE QU'UNE SUITE ?

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrons noter u_1 (lire « u indice 1 »), un deuxième u_2 (« u indice 2 »), un troisième u_3 et, de manière générale, un n-ième u_n (« u indice n »).

A Notations et définitions

On note (u_n) la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ Le nombre u_n est appelé **terme d'indice** n de la suite (u_n).
Il est parfois commode de noter u_0 le premier terme, ce que nous ferons en général.

▶ Exemple

Posons, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n$.
Nous définissons ainsi la suite (u_n) dont les premiers termes sont :
$u_0 = 3^0 = 1$; $u_1 = 3^1 = 3$; $u_2 = 3^2 = 9$; … ; $u_{10} = 3^{10} = 59\ 049$.

Attention. (u_n) désigne une suite tandis que u_n sans parenthèses désigne un nombre.

B Modes de génération d'une suite

Il y a deux procédés usuels pour définir une suite.

• **Par une expression du type $u_n = f(n)$**

Par exemple : $u_n = n^2 + 2n$.
Alors : $u_0 = 0$, $u_1 = 1^2 + 2\times1 = 3$, $u_2 = 2^2 + 2\times2 = 8$, $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) = n^2 + 4n + 3$.

• **Par récurrence**

Ce procédé signifie que l'on donne le premier terme u_0 et une relation permettant de définir chaque terme à partir du précédent.
Une telle relation est appelée une **relation de récurrence.**
Par exemple : $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On peut alors calculer successivement les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots$
Ainsi : $u_1 = 3u_0 + 1 = 3\times2 + 1 = 7$; $u_2 = 3u_1 + 1 = 22$; etc.

Autres modes de génération : par des motifs géométriques (capacité 2) par un algorithme (capacité 4).

2. SUITES ARITHMÉTIQUES

A Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

Lorsque pour une suite (u_n), on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en ajoutant toujours le même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est arithmétique.
Plus précisément :

Définition 1

Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :
$$u_{n+1} = u_n + r.$$
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).

▶ Exemple

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 8$.
Alors : $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = -1$, …

▶ Remarques

• Le réel r peut être positif ou négatif.
• Si $r = 0$, alors tous les termes de la suite sont égaux : la suite est constante.

B Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et r

Théorème 1

❶ Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r, alors pour tout naturel n :
$$u_n = u_0 + nr.$$
❷ Réciproquement : si pour tout naturel n, $u_n = an + b$, alors (u_n) est une suite **arithmétique** de raison a.

Démonstration

On utilise la définition d'une suite arithmétique.
❶ $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$; et ainsi, de proche en proche, on obtient $u_3 = u_0 + 3r$, …, $u_n = u_0 + nr$.
❷ $u_{n+1} - u_n = [a(n+1) + b] - (an + b) = a$, d'où le résultat.

Pour la notion de réciproque, voir les pages Logique à la fin du manuel.

▶ Exemples

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $r = 3$.
Alors $u_{50} = 5 + 50\times3 = 155$.
2. (u_n) est une suite définie pour tout naturel n par $u_n = 3 + 8n$.
Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison 8.

C Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et r

Théorème 2

(u_n) est une suite **arithmétique** de raison r.
Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :
$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Si $p = 0$, on retrouve le théorème 1.

Démonstration

On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$.
$u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$.
Donc $u_n - u_p = nr - pr$; d'où $u_n = u_p + (n-p)r$.

▶ Exemple

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1{,}5$.
On a alors : $u_{32} = u_{15} + (32 - 15)r = 9 + 17\times1{,}5 = 34{,}5$;
$u_2 = u_{15} + (2 - 15)r = 9 - 13\times1{,}5 = -10{,}5$.

D Une application : évolutions successives à accroissements constants

▶ Exemple

Une personne effectue dans une banque un placement de 10 000 euros à intérêts simples à 3 % par an.
Cela signifie que chaque année, son capital augmente de 3 % du capital initial.
Notons C_n le capital en euros la n-ième année.
On a : $C_0 = 10\,000$; $C_1 = C_0 + 300 = 10\,300$; $C_2 = C_1 + 300 = 10\,600$; … ; $C_n = C_{n-1} + 300$.
(C_n) est donc une suite arithmétique de premier terme 10 000 et de raison 300.

E Lien avec les fonctions affines

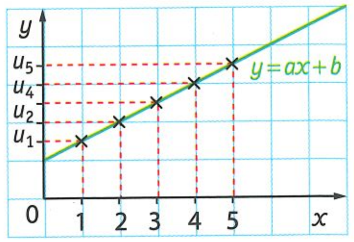
On a vu (théorème 2) que dire que la suite (u_n) est arithmétique équivaut à dire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est de la forme $an+b$.

Or on sait que la fonction f définie par $f(x)=ax+b$ (x réel) est une fonction affine.

Ainsi, u_n est égale à $f(n)$.

▶ **Illustration graphique**

u_n est donc l'ordonnée du point d'abscisse n de la droite d'équation $y=ax+b$.



F Calcul de $1+2+3+\ldots+n$

Théorème 3

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

La propriété à démontrer est équivalente à : $2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$.

Posons $S_n=1+2+\ldots+(n-1)+n$ (1)

On peut écrire : $S_n=n+(n-1)+\ldots+2+1$ (2)

Ajoutons membre à membre ces deux égalités. On obtient :

$$2S_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ termes}}$$

Donc $2S_n=n(n+1)$

On transforme la conclusion par une propriété équivalente (voir les pages Logique à la fin du manuel).

3. SUITES GÉOMÉTRIQUES

A Qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Lorsqu'on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en multipliant toujours par le même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est géométrique.

Plus précisément :

Définition 2

Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q non nul, tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1}=qu_n.$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

▶ **Exemple**

• Suite géométrique (u_n) de raison 5 et de premier terme 2.

$u_0=2$, alors $u_1=5\times u_0=10$; $u_2=5\times u_1=50$; $u_3=50\times 5=250$, …

• Suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 égal à 1 et de raison -2.

$u_0=1$, $u_1=1\times(-2)=-2$; $u_2=(-2)\times(-2)=4$; $u_3=4\times(-2)=-8$, …

B Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et q

Théorème 4

❶ (u_n) est une suite **géométrique** de raison q.
Alors, pour tout naturel n : $\boldsymbol{u_n=q^nu_0}$.

❷ Si, pour tout naturel n, $u_n=ba^n$, alors (u_n) est une suite **géométrique** de raison a.

Démonstration

On utilise la définition d'une suite géométrique.

❶ $u_1=qu_0$; $u_2=qu_1=q\times q\times u_0=q^2u_0$;

et ainsi, de proche en proche, on obtient : $u_3=q^3u_0$, …, puis $u_n=q^nu_0$.

❷ $u_{n+1}=ba^{n+1}=b\times(a^n)\times a=u_n\times a$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison a.

▶ **Exemples**

1. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0=3$ et $q=\frac{1}{2}$. Alors $u_6=\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 3=\frac{3}{2^6}=\frac{3}{64}$.

2. On pose pour tout naturel n, $u_n=4^n\times 5$. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 4.

C Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et q

Théorème 5

(u_n) est une suite **géométrique** de raison q. Alors pour tout naturel n et tout naturel p : $\boldsymbol{u_n=u_pq^{n-p}}$.

Démonstration

On utilise la formule $u_n=u_0q^n$.

$u_n=q^nu_0$; or $u_p=q^pu_0$, donc, puisque $q\neq 0$, $u_0=\frac{u_p}{q^p}$. D'où $u_n=q^n\frac{u_p}{q^p}=u_pq^{n-p}$.

▶ **Remarque**

Si $p=0$, on retrouve le théorème 4.

▶ **Exemple**

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et telle que $u_{10}=5$. Alors :

$u_{50}=u_{10}\times q^{50-10}=5\times\left(\frac{9}{2}\right)^{40}$; $u_6=u_{10}\times q^{6-10}=5\times\left(\frac{9}{2}\right)^{-4}=5\times\frac{2^4}{9^4}$.

D Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant

▶ **Exemple**

Une personne effectue dans une banque un placement de 10 000 euros à intérêts composés à 2 % par an. Ceci signifie que chaque année son capital augmente de 2 % du capital de l'année précédente. Notons C_n le capital en euros de la n-ième année.

On a : $C_0=10\,000$; $C_1=10\,000+\frac{2}{100}10\,000$; $C_2=C_1+\frac{2}{100}C_1$; … ; $C_{n+1}=C_n+\frac{2}{100}C_n$.

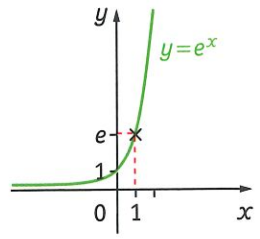
Or $C_n+\frac{2}{100}C_n=C_n\left(1+\frac{2}{100}\right)=(1{,}02)C_n$.

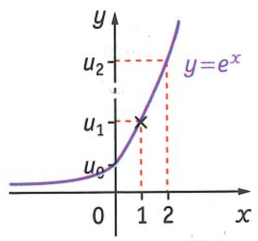
Donc, pour tout entier $n\geqslant 0$, $C_{n+1}=(1{,}02)C_n$.

Donc (C_n) est une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison 1,02.

E Lien avec la fonction exponentielle

On verra au chapitre 5 que la fonction définie par $f(x)=\mathrm{e}^x$ est appelée fonction exponentielle (avec $\mathrm{e}\simeq 2{,}718$) et que sa courbe a l'allure ci-contre.
Si on pose $u_n=f(n)$, c'est-à-dire $u_n=\mathrm{e}^n$, la suite (u_n) est géométrique de raison e, car $u_{n+1}=\mathrm{e}u_n$, de premier terme e^0 égal à 1.
u_n est donc l'ordonnée du point de la courbe d'équation $y=\mathrm{e}^x$, d'abscisse n.





F Calcul de $1+q+q^2+\ldots+q^n$ $(q\neq 1)$

Théorème 6

Si $q\neq 1$ alors $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $1-q$, on constate qu'elle est équivalente à $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n)=1-q^{n+1}$.
Démontrons cette dernière égalité :
$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n)=(1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\ldots+\cancel{q^n})-(\cancel{q}+\cancel{q^2}+\ldots+\cancel{q^n}+q^{n+1})=1-q^{n+1}$.

▶ Remarque

Si $q=1$, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1\text{ fois}}=n+1$.

▶ Exemple

Posons $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{10}}$. Appliquons le résultat du théorème 6 avec $q=\dfrac{1}{2}$.

On obtient $S=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{11}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{11}}}{\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^{11}}\right)$, c'est-à-dire $2-\dfrac{1}{2^{10}}$.

4. SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Lorsque chaque terme d'une suite est strictement inférieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement croissante.
Lorsque chaque terme d'une suite est strictement supérieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement décroissante.

Définition 3

La suite (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque pour tout naturel n, $u_n<u_{n+1}$.
La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque pour tout naturel n, $u_n>u_{n+1}$.

▶ Remarque

On définit de même une suite croissante en remplaçant l'inégalité stricte $u_n<u_{n+1}$ par l'inégalité large $u_n\leqslant u_{n+1}$. De même, pour une suite décroissante, on remplace $u_n>u_{n+1}$ par $u_n\geqslant u_{n+1}$.

▶ Exemples

• La suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n=5n+1$ est strictement croissante.
En effet, pour tout naturel n, $u_{n+1}=5(n+1)+1=5n+5+1=5n+6$.
Donc $u_{n+1}-u_n=5n+6-(5n+1)=5$.
Donc pour tout naturel n, $u_{n+1}-u_n>0$, c'est-à-dire $u_{n+1}>u_n$.
• La suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n=-n^2+4$ est strictement décroissante.
En effet, pour tout naturel n, $u_{n+1}=-(n+1)^2+4=-(n^2+2n+1)+4=-n^2-2n+3$.
Donc $u_{n+1}-u_n=-n^2-2n+3-(-n^2+4)=-2n-1$.
Donc pour tout naturel n, $u_{n+1}-u_n<0$, c'est-à-dire $u_{n+1}<u_n$.
• La suite (u_n) définie par $u_n=(-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.
En effet, $u_0=1$, $u=-1$, $u_2=1$. Les termes u_n sont successivement égaux à 1 et à -1.

5. NOTION DE LIMITE

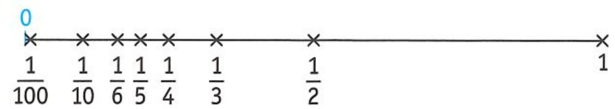
Étudier la limite d'une suite, c'est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, « vers $+\infty$ ».
Plus précisément c'est s'intéresser aux questions suivantes :
• les nombres u_n finissent-ils par s'accumuler près d'un nombre fixe ?
• les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

A Limite finie

▶ Exemple

Suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{1}{n}$ $(n\neq 0)$

Écrivons la liste des termes de cette suite (u_n) : 1 ; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{4}$; … ; $\dfrac{1}{10}$; … ; $\dfrac{1}{100}$; … ; $\dfrac{1}{10^3}$; … ; $\dfrac{1}{10^{10}}$.
Les termes finissent par s'accumuler autour de zéro.



On dit que la suite (u_n) converge vers 0, ou encore qu'elle admet 0 comme limite. On écrit $\mathbf{lim}(u_n)=\mathbf{0}$.

B Limite infinie

Suite (v_n) définie par $v_n=n^2$: $v_0=0$, $v_1=1$, $v_2=4$, …, $v_{10}=10^2=100$, $v_{100}=100^2=10\,000$…
Les termes finissent par être aussi grands que l'on veut.
On dit que la suite (v_n) tend vers $+\infty$ ou encore qu'elle admet $+\infty$ comme limite.
On écrit $\mathbf{lim}(v_n)=+\infty$.
On définit de manière analogue la notion de limite égale à $-\infty$.
Par exemple $\lim(-n^2)=-\infty$.

En effet, n^2 devient aussi grand que l'on veut mais $-n^2$ est négatif.

C Suite n'admettant pas de limite

▶ Exemple

Suite (u_n) définie par $u_n=(-1)^n$

Les termes u_n sont successivement égaux à 1 ou à -1, donc cette suite n'admet pas de limite.

CAPACITÉS

1 Utiliser le registre de la langue naturelle, le registre graphique et passer de l'un à l'autre

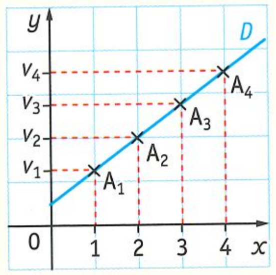
a. **On considère l'ensemble des multiples positifs du nombre 3, c'est-à-dire : 3×1, 3×2, 3×3, ... On dira que le premier multiple est 3×1, le deuxième 3×2, le troisième 3×3, ...**
Écrire en fonction de n le n-ième multiple de 3.
On le notera u_n.
b. **On ajoute 2 à chacun des multiples u_n de 3 et on divise le résultat obtenu par 4.**
On note v_n le résultat obtenu. Expliciter v_n en fonction de n, puis calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
c. **Construire la droite D d'équation : $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ et expliquer comment on peut lire graphiquement les valeurs de v_1, v_2, v_3 et v_4.**

Solution

a. Le premier multiple de 3 est égal à 3×1, le deuxième à 3×2, le troisième à 3×3, ...
Le n-ième multiple de 3 sera donc égal à $3\times n$. Donc $u_n=3n$, pour tout entier $n\geqslant1$.

b. D'après la définition de v_n, on peut écrire :
$$v_n=\frac{u_n+2}{4},$$
c'est-à-dire $v_n=\frac{3n+2}{4}$.
Donc $v_1=\frac{5}{4}$; $v_2=2$; $v_3=\frac{11}{4}$; $v_4=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$.

c. La droite D passe par le point de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et par le point de coordonnées $\left(1;\frac{5}{4}\right)$.



Posons $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.
On peut remarquer que $v_n=f(n)$.
Donc v_1 est l'ordonnée du point A_1 d'abscisse 1 ; v_2 est l'ordonnée du point A_2 d'abscisse 2 ; v_3 est l'ordonnée du point A_3 d'abscisse 3 ; v_4 est l'ordonnée du point A_4 d'abscisse 4.

Méthode

→ **On définit ainsi une suite (u_n) de terme général $u_n=3n$.**

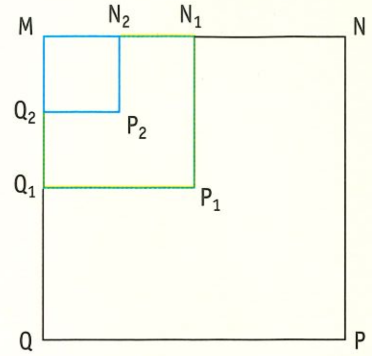
→ **On définit ainsi une suite (v_n) de terme général $v_n=\frac{3n+2}{4}$.**

→ **On peut vérifier que l'on retrouve les valeurs de v_n calculées à la question b.**

2 Proposer, modéliser une situation pour générer une suite

CAPACITÉS

MNPQ est un carré de côté 1 mètre.
On note N_1 le milieu de [MN] et Q_1 le milieu de [MQ], puis N_2 le milieu de $[MN_1]$ et Q_2 le milieu de $[MQ_1]$, etc.
On construit alors une famille de carrés emboîtés MNPQ, $MN_1P_1Q_1$, $MN_2P_2Q_2$, etc.
On note $\mathscr{A}_0$ l'aire du carré MNPQ, $\mathscr{A}_1$ l'aire du carré $MN_1P_1Q_1$, $\mathscr{A}_2$ l'aire du carré $MN_2P_2Q_2$, etc.
a. **Calculer $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$.**
b. **On définit ainsi une suite $(\mathscr{A}_n)$.**
Expliquer pourquoi chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{4}$.



Solution

a. Nous prendrons le m^2 comme unité d'aire.
On a donc $\mathscr{A}_0=1$.
$\mathscr{A}_1$ est l'aire d'un carré de côté $\frac{1}{2}$ m. Donc $\mathscr{A}_1=\frac{1}{4}$.
$\mathscr{A}_2$ est l'aire d'un carré de côté $\frac{1}{4}$ m. Donc $\mathscr{A}_2=\frac{1}{16}$.

b. À chaque étape, la longueur du côté du carré est divisée par 2 ; donc son aire est divisée par 4.
$(\mathscr{A}_n)$ est donc la suite géométrique de premier terme $\mathscr{A}_0=1$ et de raison $\frac{1}{4}$.

Méthode

→ **D'après le choix de l'unité d'aire, ceci signifie que $\mathscr{A}_0=1$ m².**

→ **Si ℓ est la longueur du côté d'un carré, son aire est égale à ℓ^2.**
L'aire d'un carré de côté $\frac{\ell}{2}$ est égale à $\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$, c'est-à-dire à $\frac{\ell^2}{4}$.

3 Calculer des termes d'une suite

A. Suite définie par $u_n=f(n)$
(u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n=2n^2-4n+1$.
a. **Calculez u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}.**
b. **Calculez u_{n+1} en fonction de n.**

Solution

a. $u_0=1$; $u_1=2-4+1=-1$;
$u_2=2\times2^2-4\times2+1=8-8+1=1$;
$u_3=2\times3^2-4\times3+1=7$.

b. $u_{n+1}=2(n+1)^2-4(n+1)+1$

$u_{n+1}=2\left(n^2+2n+1\right)-4(n+1)+1$
$=2n^2-1$.

Méthode

→ **Pour calculer u_0, on remplace n par 0 dans l'expression de u_n ;** pour calculer u_1, on remplace n par 1 ; etc.

→ **Pour calculer u_{n+1}, on remplace n par $n+1$ dans l'expression de u_n.**

→ **On développe en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.**

B. Suite définie par récurrence

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 4$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

Calculez u_1, u_2 et u_3.

Solution

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4} \times 4 + 2 = 5$;

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4} \times 5 + 2 = \frac{23}{4}$;

$u_3 = \frac{3}{4} \times \frac{23}{4} + 2 = \frac{101}{16}$.

Méthode

→ On utilise la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ pour calculer successivement u_1, u_2 et u_3

4 Calculer les termes d'une suite définie par un algorithme

On considère l'algorithme ci-contre, n désignant un entier supérieur ou égal à 1.

a. Quel résultat obtient-on pour $n = 2$? pour $n = 3$?

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet de calculer les termes u_n de la suite (u_n) définie par récurrence de la manière suivante : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Entier n
$u \leftarrow 5$
Pour k allant de 1 à n
$u \leftarrow 2u + 3$
Résultat : u

Solution

a. Au début, u prend la valeur 5.
Si $n = 2$, il y a deux passages dans la boucle.
Premier passage : u prend la valeur $2 \times 5 + 3 = 13$.
Second passage : u prend la valeur $2 \times 13 + 3 = 29$.
Si $n = 3$, il y a trois passages, et au troisième passage, u prend la valeur $2 \times 29 + 3 = 61$.

b. Écrivons les premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 5$, $u_1 = 2u_0 + 3 = 13$, $u_2 = 2u_1 + 3 = 29$, $u_3 = 2u_2 + 3 = 61$, ...
On peut constater que u_1 est le résultat obtenu par l'algorithme après le premier passage dans la boucle, u_2 après le deuxième passage, u_3 après le troisième passage. Plus généralement, pour obtenir u_n, il suffit d'entrer la valeur n dans l'algorithme.

Méthode

→ Cet algorithme fait intervenir une boucle « pour ».

→ La valeur initiale de u dans l'algorithme est égale à u_0

5 Calculer le terme général d'une suite, la somme des termes consécutifs, étudier le sens de variation

A. Cas d'une suite arithmétique

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 1$.

a. Exprimer u_n en fonction de n.

b. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

2. (v_n) est la suite définie pour tout naturel n par $v_n = -2n + 4$. Quelle est sa nature ?

Solution

1.a. $u_n = u_0 + nr$ d'où $u_n = -1 + n$.

b. (u_n) est une suite arithmétique de raison 1.
Donc, $u_{n+1} = u_n + 1$. Donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

2. $v_n = an + b$ avec $a = -2$ et $b = 4$, donc (v_n) est une suite **arithmétique** de raison $a = -2$.

Méthode

→ On utilise la définition d'une suite strictement croissante.

→ Il suffit d'utiliser un résultat du cours

B. Cas d'une suite géométrique

1. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Exprimez u_n en fonction de n.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout naturel n par $v_n = 4^n$.

a. Quelle est la nature de cette suite (v_n) ?

b. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Solution

1. $u_n = u_0 \times q^n$ d'où $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{2^n}$.

2.a. $v_n = a^n \times b$ avec $a = 4$ et $b = 1$. Donc (v_n) est une suite **géométrique** de raison $q = 4$.

b. $S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n$.
Donc $S_n = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$.

Méthode

→ Il faut appliquer un résultat du cours.

→ Il faut appliquer un résultat du cours.

→ On applique la formule vue en cours : $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Ici $q = 4$

6 Modéliser par une suite arithmétique ou géométrique

Une personne souhaite placer durant plusieurs années un capital de 100 000 €.
Elle hésite entre deux types de placements : un placement à intérêts simples à 4 % par an ou un placement à intérêts composés à 3,8 % par an.

1.a. **Expliquer comment on peut associer une suite que l'on notera (S_n) au placement à intérêts simples.**
Préciser la nature de (S_n).

b. **Expliquer comment on peut associer une suite que l'on notera (C_n) au placement à intérêts composés.**
Préciser la nature de (C_n).

2. **Quel est le placement le plus avantageux pour une durée de 3 ans ? Quel est le placement le plus avantageux pour une durée de 4 ans ?**

Solution

1.a. On note S_0 le capital initial en euros, S_1 le capital au bout d'un an, S_2 le capital au bout de deux ans, etc.
On a : $S_0 = 100\,000$,
$S_1 = 100\,000 + 4\,000 = 104\,000$
$S_2 = S_1 + 4\,000 = 108\,000$
La suite (S_n) est une suite **arithmétique** de raison 4 000 et de premier terme 100 000.

b. On note C_0 le capital initial en euros, C_1 le capital au bout d'un an, C_2 le capital au bout de deux ans, etc.
On a : $C_0 = 100\,000$,
$C_1 = C_0 + \frac{3,8}{100}C_0$, c'est-à-dire $C_1 = C_0(1+0,038) = 1,038C_0$
$C_1 = 103\,800$.
$C_2 = C_1 + \frac{3,8}{100}C_1 = C_1(1+0,038) = 1,038C_1$
$C_2 \approx 107\,744$.
La suite (C_n) est une suite **géométrique** de raison 1,038 et de premier terme 100 000.

2. Calculons les valeurs du capital chaque année dans les deux cas.
$S_0 = 100\,000$, $S_1 = 104\,000$, $S_2 = 108\,000$, $S_3 = 112\,000$, $S_4 = 116\,000$.
$C_0 = 100\,000$, $C_1 = 103\,800$, $C_2 \approx 107\,744$, $C_3 \approx 111\,838$, $C_4 \approx 116\,088$.
Donc, au bout de 3 ans, le placement à intérêts simples est plus avantageux.
Au bout de 4 ans, c'est le placement à intérêts composés le plus avantageux.

Méthode

→ **Dans un placement à intérêts simples à 4 % par an :** chaque année le capital augmente de 4 % du capital initial, c'est-à-dire ici de 4 000 €.

→ **Chaque terme de (S_n) est obtenu en ajoutant 4 000 au précédent.**

→ **Dans un placement à intérêts composés à 3,8 % par an :** chaque année le capital augmente de 3,8 % de sa valeur de l'année précédente.

→ **Chaque terme de (C_n) est obtenu en multipliant le précédent par 1,038.**

7 Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

A. Cas d'une limite finie

1. **Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.**

a. **Calculer les dix premiers termes de cette suite.**
b. **Vers quel nombre les termes de cette suite semblent-ils s'accumuler ?**
c. **Quelle semble être la limite de cette suite ?**

Solution

1.a. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$,
$u_4 = \frac{1}{16}$, $u_5 = \frac{1}{32}$, $u_6 = \frac{1}{64}$,
$u_7 = \frac{1}{128}$, $u_8 = \frac{1}{256}$, $u_9 = \frac{1}{512}$.

b. Les termes de cette suite semblent s'accumuler près de 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Il semble que la limite de la suite (u_n) soit zéro.
On écrit $\lim(u_n) = 0$.

Méthode

→ **Plus généralement, on conçoit qu'il en est ainsi pour toute suite (q^n) avec $0 < q < 1$.**

B. Cas d'une limite infinie

1. **Considérons la suite (v_n) de terme général $v_n = 3^n$.**
a. **Calculer les dix premiers termes de la suite.**
b. **Quelle semble être la limite de cette suite ?**

Solution

1.a. On a : $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 9$, $v_3 = 27$,
$v_4 = 81$, $v_5 = 243$, $v_6 = 729$,
$v_7 = 2187$, $v_8 = 6561$, $v_9 = 19683$.

b. Les termes de cette suite prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut lorsque n tend vers $+\infty$.
Il semble que cette suite admet $+\infty$ comme limite.
On écrit $\lim(v_n) = +\infty$.

Méthode

→ **Plus généralement, on conçoit qu'il en est ainsi pour toute suite (q^n) avec $q > 1$.**

Le coin MÉMO

Les points essentiels du chapitre

- En général, deux façons pour définir une suite :
  – $u_n = f(n)$
  – u_0 et $u_{n+1} = g(u_n)$, termes définis de proche en proche (par récurrence).
- Suite arithmétique de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$
  donc $u_n = u_0 + nr$
  $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- Suite géométrique de raison q : $u_{n+1} = q \times u_n$ donc $u_n = u_0 \times q^n$
  $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$).
- (u_n) strictement croissante si, pour tout n, $u_n < u_{n+1}$.
- (u_n) strictement décroissante si, pour tout n, $u_n > u_{n+1}$.
- $\lim u_n = \ell$ si les u_n finissent par s'accumuler autour de ℓ.
  $\lim u_n = +\infty$ si les u_n finissent par être aussi grands que l'on veut.

Des automatismes à avoir

- ✔ Savoir reconnaître une suite arithmétique : on ajoute le même nombre r pour passer d'un terme au suivant.
- ✔ Savoir reconnaître une suite géométrique : on multiplie par le même nombre q pour passer d'un terme au suivant.
- ✔ Augmenter une quantité de 10 % équivaut à la multiplier par 1,1 (très utile pour reconnaître une suite géométrique).

Des erreurs à éviter

→ (u_n) désigne une suite alors que u_n sans parenthèse désigne un nombre.

→ Une suite n'admet pas toujours une limite.
Exemple : $u_n = (-1)^n$.

Registre de la langue naturelle et registre graphique

→ voir Capacité 1 p. 40

QUESTIONS FLASH

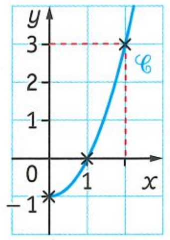
1 On associe à chaque entier naturel n son double. On note u_n le résultat obtenu.
a. Exprimer u_n en fonction de n.
b. Quelle est la valeur de u_{10} ?

2 On multiplie par 10 chaque entier naturel n. On note u_n le résultat obtenu.
a. Exprimer u_n en fonction de n.
b. Quelle est la valeur de u_{50} ?

3 Étant donné un entier naturel n, on le multiplie par 5 et on ajoute 1 au résultat obtenu.
On note u_n le nombre obtenu.
a. Exprimer u_n en fonction de n.
b. Quelle est la valeur de u_8 ?

4 On multiplie chaque entier naturel par 4 et on divise par 5 le résultat obtenu. On note u_n le nombre obtenu.
a. Exprimer u_n en fonction de n.
b. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_5 ?

5 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$.
On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$.
Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ? de u_2 ?



QCM Une seule réponse exacte

6 On pose $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. Alors $\dfrac{2}{u_5}$ est un multiple :
a. de 3. **b.** de 5. **c.** de 13. **d.** de 10.

Proposer, modéliser une situation pour générer une suite

→ voir Capacité 2 p. 41

QUESTIONS FLASH

7 Un coureur s'entraîne en vue d'une compétition. Il court chaque jour 50 m de plus que le jour précédent. Il parcourt 1 km le premier jour de son entraînement. Quelle distance parcourt-il le deuxième jour ? le quatrième jour ?

8 [OA] est un segment de longueur 1 m. On note I_1 le milieu de [OA], I_2 le milieu de $[OI_1]$, I_3 le milieu de $[OI_2]$, etc. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = OI_n$.
Quelle est la valeur de u_1 ? de u_3 ?

9 D_1 est le disque de centre O et de rayon R, D_2 le disque de centre O et de rayon 2R, D_3 le disque de centre O et de rayon 3R, etc. On construit ainsi une famille de disques D_n de centre O.
On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n = aire de D_n.
a. Calculer u_2 et u_3 en fonction de R.
b. Exprimer u_n en fonction de n et de R.

QCM Une seule réponse exacte

10 L'unité de longueur est le mètre. On note p_1 le périmètre d'un carré de côté 1, p_2 le périmètre d'un carré de côté 2, p_3 le périmètre d'un carré de côté 3. On définit ainsi une suite p_n. Alors pour tout entier naturel n :
a. $p_n = n^2$. **b.** $p_n = 4n$.
c. $p_n = 4(n-1)$. **d.** $p_n = 4(n+1)$.

Calculer des termes d'une suite

→ voir Capacités 3 et 4 p. 41 et 42

QUESTIONS FLASH

11 (u_n) est la suite définie, pour tout nombre naturel n, par : $u_n = n^2+1$. Calculer u_0, u_1, u_{10}.

12 (u_n) est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Pour les exercices 13 à 18, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}, puis calculer u_{n+1} en fonction de n.

13 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = -n^2+5n-1$.

14 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

15 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = 2^n + n$.

16 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = (-1)^n$.

17 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = (-1)^n \times n$.

18 (u_n) est la suite définie, pour tout naturel n, par $u_n = \text{Ent}\left(\frac{n}{3}\right)$ où $\text{Ent}(x)$ désigne la partie entière de x.

Pour les exercices 19 à 24, calculer u_1, u_2, u_3.

19 $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

20 $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -u_n + 3$.

21 $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = nu_n$.

22 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

23 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (-1)^n u_n + 5$.

24 $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + n$.

Pour les exercices 25 à 27, écrire un algorithme qui permet d'afficher un terme u_n de la suite (u_n).

25 $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1$.

26 $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + 5$.

27 $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}$.

QCM Une seule réponse exacte

28 Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n^2 - 3$.
Alors $u_{n+1} - u_n$ est égal à :

a. $4n + 2$. **b.** $2n^2$.
c. 6. **d.** $2(n+1)^2 - 2n^2 - 6$.

Calculer le terme général d'une suite, la somme des termes consécutifs, étudier le sens de variation

→ voir Capacité 5 p. 43

QUESTIONS FLASH

29 (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Indiquer son sens de variation dans chacun des cas suivants :

a. $r = 3$. **b.** $r = -1$.

30 (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10 et de raison q. Indiquer son sens de variation dans chacun des cas suivants :

a. $q = 2$. **b.** $q = \frac{1}{2}$.

Pour les exercices 31 à 36, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Exprimer u_n en fonction de n et donner son sens de variation.

31 $u_0 = 2$ et $r = -3$.

32 $u_0 = -3$ et $r = -1$.

33 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{3}{2}$.

34 $u_0 = 2$ et $r = \frac{5}{4}$.

35 $u_0 = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{1}{4}$.

36 $u_0 = -\frac{1}{4}$ et $r = -\frac{5}{2}$.

Pour les exercices 37 à 40, justifier que la suite (u_n) est arithmétique.
Donner son premier terme u_0 et sa raison r.

37 (u_n) est définie par : $u_n = 3n - 5$.

38 (u_n) est définie par : $u_n = -2n + 4$.

39 (u_n) est définie par : $u_n = \frac{5n}{2} + \frac{1}{3}$.

40 (u_n) est définie par : $u_n = -\frac{4n}{5} + 12$.

Pour les exercices 41 à 44, (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et sa raison q.
Exprimer u_n en fonction de n.

41 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{2}$.

42 $u_0 = -18$ et $q = \frac{1}{3}$.

43 $u_0 = \frac{1}{8}$ et $q = 4$.

44 $u_0 = -\frac{1}{9}$ et $q = 3$.

45 **1.** **Préciser la nature de la suite (u_n).**
2. **Donner le sens de variation de la suite (u_n).**

a. $u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$. **b.** $u_n = \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

Pour les exercices 46 à 48, justifier que la suite (u_n) est géométrique, donner son premier terme u_0 et sa raison q.

46 **a.** $u_n = 3 \times 5^n$. **b.** $u_n = -5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

47 **a.** $u_n = \frac{2 \times 3^n}{5}$. **b.** $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

48 **a.** $u_n = \frac{5}{2^n}$. **b.** $u_n = \frac{2 \times 3^n}{5^n}$.

49 Calculer la somme $1 + q + \ldots + q^n$ dans chacun des cas suivants :

a. $q = 5$. **b.** $q = \frac{1}{5}$.

QCM Une seule réponse exacte

50 On pose $A = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{10}$. Alors :

a. $A = \frac{1 - 4^{10}}{1 - 4}$.

b. $A = \frac{4^{11} - 1}{3}$.

c. $A = \frac{(-4)^{11} - 1}{3}$.

Modéliser par une suite arithmétique ou géométrique

→ voir Capacité 6 p. 44

QUESTIONS FLASH

51 Un capital est placé à intérêts simples de 1 % par an. On note (S_n) le capital à la n-ième année.
(S_n) est une suite arithmétique. Pourquoi ?

52 Un capital est placé à intérêts composés à 10 % par an. On note (S_n) le capital à la n-ième année.
(S_n) est une suite géométrique. Pourquoi ?

53 Anouk fait des économies. Chaque mois elle ajoute 5 euros dans sa tirelire. On note (S_n) la somme disponible le n-ième mois.
Quelle est la nature de la suite (S_n) ?

54 Mathias fait des économies. Chaque mois il ajoute dans sa tirelire le dixième de la somme qu'elle contient. On note (C_n) la somme disponible le n-ième mois.
Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

QCM Une seule réponse exacte

55 La taille d'un arbre augmente de 5 % chaque année. On note T_n la taille de l'arbre la n-ième année.
Alors :
a. (T_n) est une suite arithmétique.
b. (T_n) est une suite géométrique de raison 1,5.
c. (T_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

Conjecturer la limite d'une suite

→ voir Capacité 7 p. 45

QUESTIONS FLASH

56 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^3 + 10}$.

57 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = n^3 + 10$.

58 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = -n^3$.

59 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = 10 + \frac{1}{n}$.

60 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = -10 - \frac{1}{n^2}$.

61 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = n - 10^3$.

62 Expliquer pourquoi la suite de terme général $u_n = 4(-1)^n$ n'a pas de limite.

63 Conjecturer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$.

QCM Une seule réponse exacte

64 ℓ et ℓ' sont deux réels et (u_n) et (v_n) sont deux suites.
On sait que : $\lim u_n = \ell$ et que $\lim v_n = \ell'$.
Alors, à votre avis :
a. $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
b. $\lim(u_n + v_n) = \ell \times \ell'$.
c. On ne peut rien dire sur la limite éventuelle de $u_n + v_n$.

→ CORRIGÉS p. 312

QUESTIONS sur LE COURS

Vérifier ses connaissances

65 $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Calculer u_2 et u_4.

66 (u_n) est la suite arithmétique de raison 2.
On suppose que $u_0 = -1$. Calculer u_{10}.

67 (u_n) est la suite géométrique de raison -3.
On suppose que $u_0 = 2$. Calculer u_2 et u_3.

68 (u_n) est la suite géométrique de raison 2.
On suppose que $u_0 = 3$.
a. Calculer u_5. b. Expliciter u_n.

69 $u_n = 1 + \frac{1}{n^4}\,(n \neq 0)$.
Conjecturer la limite de (u_n).

70 $u_n = n^4$. Conjecturer la limite de (u_n).

VRAI ou FAUX ?

Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse

71 $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

72 $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

73 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors $u_n = nu_0 + r$.

74 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.

QCM

Une seule réponse exacte

75 Pour tout entier n, $u_n = aq^n$, alors :
a. (u_n) est une suite géométrique.
b. (u_n) est une suite arithmétique.
c. (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

76 Pour tout entier n, $u_n = an + b$, alors :
a. (u_n) est une suite arithmétique.
b. (u_n) est une suite géométrique.
c. (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

77 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $1 < f(x) < 2$.
On considère la suite de terme général $u_n = \frac{1}{f(n)}$.
Alors :
a. Pour tout n, $u_n < 0{,}5$. b. Pour tout n, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
c. Pour tout n, $u_n = 1{,}5$.

78 Pour tout naturel $n > 0$, $u_n = \frac{1\,000}{n}$. Alors :
a. Pour tout entier n, $u_n = \frac{1}{10^{-2}n}$.
b. Pour tout entier naturel $n > 0$, $u_n > 1$.
c. Il existe un entier n, tel que $u_n < \frac{1}{2}$.

79 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r, de premier terme 2 et une suite (v_n) de raison q, de premier terme 2.
On suppose que $q = r$. Alors :
a. (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes si $r > 0$.
b. (u_n) et (v_n) sont croissantes si $r > 1$.
c. (u_n) et (v_n) sont strictement décroissantes si $r < 0$.

80 La taille d'un arbre augmente de 0,5 mètre chaque année. On note T_n la taille de l'arbre la n-ième année. Alors :
a. (T_n) est une suite arithmétique.
b. (T_n) est une suite géométrique.
c. (T_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

81 On pose $u_n = (0{,}9)^n$, alors à votre avis :
a. $\lim u_n = 1$. b. $\lim u_n = +\infty$. c. $\lim u_n = 0$.

Calcul mental

82 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Calculer $u_0 + u_1 + u_2$.

83 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r = 5$. On sait que $u_2 = 25$. Calculer u_0.

84 (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 8$. Calculer sa raison q. Calculer u_2 et u_3.

85 (u_n) est une suite définie pour tout naturel n par $u_n = n^2 + 2n$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

86 (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 2$ et qui vérifie pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_1 et u_2.

87 $u_0 = \frac{2}{3}$, $u_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{8}{3}$ sont les trois premiers termes d'une suite (u_n).
a. Cette suite peut-elle être arithmétique ?
b. Cette suite peut-elle être géométrique ?

88 La suite (u_n) est définie pour tout naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$.
Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

89 (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 1$ et qui vérifie pour tout nombre naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n$.
Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

Généralités sur les suites

90 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 5n^2 + 3n$.
a. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
b. Calculer u_{100}.
c. Calculer le centième terme de la suite.
d. Exprimer u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n.

91 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 2^n + 3n$.
a. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
b. Calculer le dixième terme de la suite.
c. Exprimer u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n.

92 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = n^2 + 4n - 1$.
a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
b. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

93 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 5}{2}$.
Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).

94 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + n$.
Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).

95 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 2$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + n + 1. \end{cases}$$
a. Donner les trois premiers termes de la suite (u_n) et les trois premiers termes de la suite (v_n).
b. Jean pense que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.
A-t-il raison ou tort ?

Suites arithmétiques

Pour les exercices 96 à 101, (u_n) est une suite arithmétique.

96 $u_0 = 2$ et $u_2 = 5$. Calculer r puis u_{10}.

97 $u_0 = 1$ et $u_{25} = 51$. Calculer r puis $u_{1\,000}$.

98 $u_0 = 0$ et $u_{20} = 20$. Calculer r puis $u_{25\,297}$.

99 $u_5 = 2$ et $u_{10} = -18$. Calculer r puis u_{52}.

100 $u_{26} = 3$ et $u_{42} = -13$. Calculer r puis u_0.

101 $u_{23} = 20$ et $u_{30} = -1$. Calculer r puis u_0.

102 Multiples de 5
a. Expliquer comment on peut associer une suite, que l'on notera (u_n), aux multiples strictement positifs de 5.
Quelle est la nature de cette suite ?
b. Combien de multiples strictement positifs de 5 sont strictement inférieurs à 450 ?

103 Les économies de Vincent
Au mois de janvier 2017, Vincent a économisé 75 €, au mois de février, il a économisé 7,50 € de plus qu'en janvier, en mars 7,50 € de plus qu'en février, etc.

Il économise ainsi chaque mois 7,50 € de plus qu'au mois précédent. On note u_0 la somme, en euros, économisée par Vincent en janvier 2017, u_1 celle économisée en février, u_2 en mars, etc.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2.a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
b. Exprimer (u_n) en fonction de n.
3. Comment est notée l'économie réalisée par Vincent en décembre 2019 ? Calculer cette économie.

104 Suite arithmétique et fonction $x \mapsto x^2$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On note (u_n) la suite définie pour tout naturel n par :

$$u_n = f(n+1) - f(n).$$

1. Calculer u_0.
2.a. Exprimer (u_n) en fonction de n.
b. En déduire que la suite (u_n) est arithmétique et préciser la raison.

105 Chute libre

Un objet qui chute à Paris parcourt approximativement 4,9 mètres durant la première seconde.
Pendant la deuxième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la première seconde.
Pendant la troisième seconde, il parcourt 9,8 mètres de plus que pendant la deuxième seconde, etc.
À chaque seconde, la distance parcourue est supérieure de 9,8 mètres à celle parcourue pendant la seconde précédente. On note d_1 la distance parcourue pendant la première seconde, d_2 celle parcourue pendant la deuxième seconde, etc.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.
2. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?
3.a. Quelle distance parcourt l'objet pendant la sixième seconde ?
b. Quelle est la distance totale parcourue pendant ces six secondes ?

106 Plantation

Un arbre mesure un mètre lors de sa plantation et sa hauteur augmente chaque année de la même longueur.

a. L'arbre a doublé de hauteur en deux ans.
De combien a-t-il poussé chaque année ?
b. Par quel nombre sera multipliée sa hauteur initiale au bout de 4 ans ?
c. On note u_0 sa hauteur initiale, en mètres, et u_n sa hauteur n années après sa plantation.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Exprimer u_n en fonction de n.
d. Au bout de combien d'années la hauteur de l'arbre dépassera-t-elle 25 mètres ?

Suites géométriques

Pour les exercices 107 à 113, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

107 $u_0 = 5$ et $q = 10$. Exprimer u_n en fonction de n.

108 $u_0 = 19$ et $q = 2$. Exprimer u_n en fonction de n.

109 $u_5 = 3$ et $q = 3$. Calculer u_{10} et u_0.

110 $u_9 = 7$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculer u_{13} et u_6.

111 $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Calculer q, puis u_7.

112 $u_0 = 3$ et $q = -1$. Calculer u_5 et u_{10}.

113 $u_0 = 1$ et $q = -3$. Calculer u_3 et u_4.

Pour les exercices 114 à 117, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique.

114 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 6^{n+2}$.

115 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5}{4^{n+1}}$.

116 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $5u_n = 7u_{n+1}$ et $u_0 \neq 0$.

117 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$.

118 Pliages

Une feuille de papier a une épaisseur de 0,15 mm.
On note e_0 cette épaisseur. On plie la feuille, on obtient alors une épaisseur de papier $e_1 = 0{,}3$ mm. Puis on plie une 2e fois, une 3e fois… et on note e_2, e_3… les épaisseurs respectivement obtenues.
a. Quelle est la nature de la suite (e_n) ?
Calculer e_2, e_3, e_4.

b. Exprimer e_n en fonction de n.
c. En supposant que cela soit possible, quelle serait l'épaisseur de papier après 20 pliages ?

119 Évaporation

En période de sécheresse, une piscine perd chaque semaine un vingtième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient 60 m³ d'eau. On suppose que la sécheresse dure 8 semaines et que l'on n'ajoute pas d'eau.

On note $V_0 = 60$ le volume de départ puis V_1, V_2, …, V_n les volumes d'eau de la piscine au bout, respectivement, d'une semaine, de deux semaines, …, de n semaines.
a. Calculer V_1, V_2.
b. Comment calcule-t-on V_{n+1} à partir de V_n ?
c. Quelle est la nature de la suite (V_n) ?
d. Quel sera le volume d'eau dans la piscine à la fin de la huitième semaine ?

Comparaison de suites arithmétiques et géométriques

120 Malthusianisme TICE

Tous les calculs peuvent être effectués avec un tableur.
En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants.
Malthus (1766-1834) émit alors l'hypothèse suivante :
• la population de l'Angleterre suit une progression géométrique en augmentant de 2 % par an ;
• l'agriculture anglaise permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 500 000 habitants supplémentaires par an suivant une progression arithmétique.

1. Calculer, selon l'hypothèse de Malthus :
a. la population de l'Angleterre en 1900 ;
b. le nombre de personnes que pouvait nourrir l'agriculture anglaise en 1900.
2. Déterminer à partir de quelle année, toujours selon l'hypothèse de Malthus, l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise.

121 Le bon choix TICE

Un employé a reçu deux propositions de salaire.
Proposition 1 : un salaire annuel de 20 000 € la 1re année puis chaque année une augmentation de 800 €.
Proposition 2 : un salaire annuel de 20 000 € la 1re année puis chaque année une augmentation de 3,5 %.
On note A_0 le salaire annuel initial de la proposition 1 puis A_1, A_2, …, A_n les salaires annuels au bout d'un an, de deux ans, …, de n années de présence.
Pour la proposition 2, on note de même G_0, G_1, G_2, …, G_n les salaires annuels successifs.

1.a. Comment calcule-t-on A_{n+1} à partir de A_n et G_{n+1} à partir de G_n ?
b. Quelle est la nature de la suite (A_n) ? et (G_n) ?
2. À l'aide d'un tableur, calculer les valeurs de A_n et G_n pour n variant de 0 à 15, puis $A_1 + A_2 + \ldots + A_{15}$ et $G_1 + G_2 + \ldots + G_{15}$ sur la même période.
3. Expliquer comment cet employé doit choisir entre les deux propositions.

122 Sommes des termes consécutifs d'une suite

1. On considère une somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique. Notons a le premier terme et ℓ le dernier terme. On a donc : $S = a + \ldots + \ell$.
Démontrer que $S = \frac{n(a+\ell)}{2}$.

INDICATION
Remarquer que, en notant r la raison, S peut s'écrire :
$S = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (\ell - r) + \ell$ (1)
$S = \ell + (\ell - r) + \ldots + \ldots + (a+r) + a$ (2)
Puis ajouter membre à membre les égalités (1) et (2).

2. En déduire la somme S des vingt premiers termes dans les cas suivants :
a. $u_0 = 10$ et $r = 3$.
b. $u_0 = 3$ et $r = 10$.
c. $u_0 = 20$ et $r = -5$.

Pour les exercices 123 à 127, (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Calculer la somme S des 10 premiers termes en utilisant la relation :

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

123 $u_0 = 100$ et $q = \frac{1}{2}$.

124 $u_0 = 3$ et $q = 5$.

125 $u_0 = \frac{1}{31}$ et $q = \sqrt{2}$.

126 $u_0 = -3$ et $q = \frac{1}{3}$.

127 $u_0 = 5$ et $q = -3$.

128 Transformer pour résoudre
1. Résoudre chacune des équations suivantes :
a. $x + x^2 = 0$;
b. $x + x^2 + x^3 = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q.
On suppose $q \neq 1$. On note S la somme de termes consécutifs de cette suite, a le premier terme et ℓ le dernier.
Démontrer que : $S = \frac{\ell q - a}{q - 1}$.

AIDE
Écrire que $S = a + q \times a + q^2 \times a + \ldots + \ell$ puis développer et simplifier $S(q-1)$.

3. Retrouver les résultats de la question **1** à l'aide de la question **2**.
4. Résoudre chacune des équations suivantes :
a. $x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$;
b. $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^8 = 0$.

Pour les exercices 129 à 132, écrire en utilisant la relation : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, la somme S sous forme d'un quotient de deux entiers.

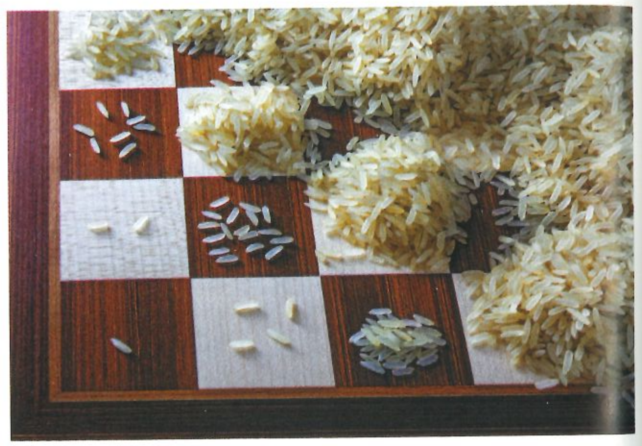
129 $S = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

130 $S = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 + 27 + 81$.

131 $S = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + 1 + 5 + 25 + 125 + 625$.

132 $S = 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$.

133 Le roi et l'échiquier
On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond :
« Placez deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier. »
Le roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?



Quelques calculs
1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le roi doit déposer dans la n-ième case.
a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
c. Exprimer u_n en fonction de n.
Calculer u_{64}.
2. On note S le nombre total de grains sur l'échiquier.
Ainsi, $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{64}$.
Calculer S.

INDICATION
Mettre 2 en facteur dans l'expression de S.

Le roi avait-il raison de sourire ?
Pour répondre, il faut savoir qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse en moyenne une tonne.
Quelles pourraient être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?

Sens de variation

Pour les exercices 134 à 139, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

134 a. $u_n = 5n + 3$. **b.** $u_n = -\frac{3n}{2} + \frac{1}{4}$.

135 a. $u_n = n^2$. **b.** $u_n = n^2 + 4n$.

136 $u_n = -n^2 + 15$. **b.** $u_n = -n^2 - 2n$.

137 a. $u_n = \frac{1}{n+1}$. **b.** $u_n = \frac{2n}{n+1}$.

138 a. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + n$.
b. $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n - n^2$.

139 a. $u_n = 2^n$.
b. $u_n = -(3)^n$.

140 Une autre méthode pour étudier le sens de variation
On considère la suite (u_n) définie pour tout naturel n strictement positif par $u_n = \frac{n}{2^n}$.
1. Calculer u_1, u_2, u_3.
Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?
2.a. Expliquer pourquoi tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.
b. Montrer que, pour tout naturel n non nul, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}.$$

c. En déduire que, pour tout naturel n non nul, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$$

d. Déduire des questions **2.a** et **2.c** que, pour tout naturel n non nul, $u_{n+1} \leqslant u_n$, puis donner le sens de variation de (u_n).

141 On considère deux suites (u_n) et (v_n), et on pose $w_n = u_n + v_n$.
a. Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors (w_n) est croissante.
b. Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont décroissantes, alors (w_n) est décroissante.

Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

Pour les exercices 142 à 146, calculer les dix premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer sa limite éventuelle.

142 a. $u_n = \frac{1}{n^3 + 1}$. **b.** $u_n = 2 + \frac{1}{n^3 + 1}$.

143 a. $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. **b.** $u_n = -1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

144 a. $u_n = 5^n$. **b.** $u_n = 5^n - 1$.

145 a. $u_n = -(5)^n$. **b.** $u_n = 10 - (5)^n$.

146 a. $u_n = (-1)^n$. **b.** $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Pour la logique

147 On considère la proposition suivante (P) : pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. Écrire la proposition (non P).

148 (u_n) et (v_n) sont deux suites. On considère la proposition (P) suivante : il existe au moins un entier n tel que $u_n = v_n$. Écrire la proposition (non P).

Pour les exercices 149 à 150, indiquer, pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

149 Si pour tout entier naturel $n \leqslant 10^{10}$, $u_n = v_n$, alors il n'existe aucun entier n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n \neq v_n$.

150 (u_n) est une suite telle que $u_n \neq 0$.
a. Si (u_n) est une suite géométrique de raison 5, alors, pour tout entier $n \leqslant 10^{10}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 5$.
b. Si pour tout entier $n \leqslant 10^{10}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 5$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison 5.

Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil

151 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

1. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre permet de d'obtenir u_n pour toute valeur de n.

```
def f(n):
    return n/(n+2)
```

2.a. Démontrer que, pour tout naturel n, $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+2}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

3.a. Analyser les différentes étapes du programme ci-contre et expliquer pourquoi il permet de trouver le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $1 - u_n \leqslant 10^{-2}$.

```
n=0
while 2/(n+2)>10**-2:
    n=n+1
print(n)
```

b. Retrouver ce résultat par le calcul.

152 NB : cet exercice est analogue au précédent.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

a. Démontrer que (u_n) est croissante.

b. Démontrer que (u_n) est majorée par 2.

2.a. Écrire un programme permettant de trouver le plus petit entier naturel n_0 tel que $2 - u_{n_0} \leqslant 10^{-3}$.

b. Retrouver ce résultat par le calcul.

153 On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 100n$.

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 50$.

2.a. Analyser le programme ci-contre et expliquer pourquoi il permet de trouver le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \mathrm{A}$ où A est un nombre strictement positif.

```
A=float(input())
n=0
while n**2-100*n<A:
    n=n+1
print(n)
```

b. Faire tourner ce programme et déterminer n_0 pour $\mathrm{A} = 10^2$, puis pour $\mathrm{A} = 10^3$.

154 NB : cet exercice est analogue au précédent.

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n^2}{10^4} - 2n$.

Faire un programme permettant de trouver le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^5$.

155 On pose $u_0 = 1$, et pour tout n, $u_n = 2\,u_{n-1} - 3$.

1. Faire un programme permettant de ranger les termes u_n dans une liste.

2. On pose $\mathrm{S} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$. Utiliser le programme précédent pour calculer S.

156 On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{9}{10}u_{n-1}$.

On pose pour tout n, $\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1.a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Expliquer pourquoi (S_n) est croissante.

c. Expliciter S_n.

2.a. Expliquer pourquoi le programme ci-contre permet de ranger les termes S_n dans une liste.

```
def S(n):
    L=[1]
    S=[1]
    for k in range(n):
        L.append(0.9*L[-1])
        S.append(sum(L))
    return S
```

b. De quel nombre les termes S_n semblent-ils s'approcher lorsque n est de plus en plus grand ?

3.a. Faire un programme permettant de trouver le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$10 - \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{A}$, où $\mathrm{A} > 0$.

b. Déterminer n_0 pour $\mathrm{A} = 10^{-3}$, puis pour $\mathrm{A} = 10^{-5}$.

Suite de Fibonacci

157 On considère la suite (u_n) définie de proche en proche de la manière suivante :

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Cette suite est appelée suite de Fibonacci.

1. Analyser le programme ci-contre et expliquer pourquoi il permet d'obtenir les termes de la suite de Fibonacci.

Programme 1

```
def F(n):
    u,v=1,1
    for k in range(n-1):
        v=u+v
        u=v-u
    return v
```

2. Analyser les différentes étapes du programme 2 ci-contre et expliquer pourquoi il permet de ranger les valeurs u_n dans une liste.

Programme 2

```
def L(n):
    L=[1,1]
    for k in range(n-1):
        L.append(L[k]+L[k+1])
    return L
```

3. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - v_n$.

a. Faire un programme permettant de ranger les termes w_n dans une liste.

b. Vérifier que, pour de grandes valeurs de n, les termes w_n sont proches de 0.

Histoire des MATHS

On peut démontrer que $\lim w_n = 0$, c'est-à-dire que $\lim v_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé « nombre d'or ». Il a fait l'objet de nombreuses études ; ainsi, par exemple, le rectangle d'or, aux proportions « harmonieuses » à l'œil humain, dont le rapport des côtés est égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suite de Syracuse

158 Étant donné un entier naturel u_0, on considère la suite (u_n) définie de proche en proche de la manière suivante :

si u_n est pair alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$, sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Cette suite est appelée suite de Syracuse.

1. Donner les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ lorsque $u_0 = 84$.
Que peut-on remarquer ?

2. Analyser les différentes étapes du programme 1 ci-contre et expliquer pourquoi il permet d'obtenir les termes d'une suite de Syracuse.

3.a. Analyser les différentes étapes du programme 2 ci-contre et expliquer pourquoi il permet de ranger les valeurs u_n dans une liste.

b. Compléter ce programme pour qu'il permette d'obtenir le terme le plus grand apparu au cours de n étapes. Cette valeur maximale est appelée « hauteur du vol ».

4. Le rang du premier terme égal à 1 de la suite de Syracuse est appelé durée du vol.
Faire tourner le programme 2 dans chacun des cas suivants et indiquer la hauteur du vol et la durée du vol.

a. $n = 23$, $u_0 = 18$ **b.** $n = 50$, $u_0 = 127$.

Programme 1

```
def S(u,n):
    for k in range(n):
        if u%2==0:
            u=u/2
        else:
            u=3*u+1
    return u
```

u%2 renvoie le reste de la division euclidienne de u par 2.

Programme 2

```
def L(u,n):
    L=[u]
    for k in range(n):
        if L[k]%2==0:
            L.append(L[k]/2)
        else:
            L.append(3*L[k]+1)
    return L
```

Histoire des MATHS

Il semble que la propriété suivante soit vraie :
« Quelque soit l'entier u_0, il existe n tel que $u_n = 1$. »
À ce jour, cette propriété n'a jamais été démontrée.
Il s'agit de la conjecture de Collatz.

Calcul de factorielle

159 On pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n \times u_{n-1}$.
Notation : $u_n = n!$ On pose, par convention, $0! = 1$.

1. Expliquer pourquoi le programme ci-contre permet d'obtenir u_n pour toute valeur de n.

2. Faire un programme permettant de trouver le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $n! \geqslant 10^5$.

```
def f(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=u*(k+1)
    return u
```

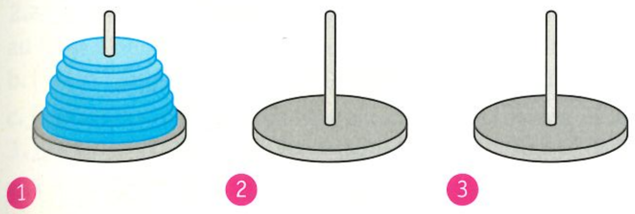
3.a. Montrer que pour tout $n > 5$, $n!$ admet pour chiffre des unités un zéro.
Quelle est la condition sur n pour que $n!$ admette zéro pour chiffre des unités et des dizaines ?

b. Vérifier que les résultats du **a** sont en accord avec ceux obtenus en utilisant le programme de la question **2**.

160 Tour de Hanoï

Partie A. De quoi s'agit-il ?

On dispose de trois piquets avec socle, numérotés 1, 2 et 3, et de n disques troués qui sont deux à deux de tailles différentes. Au départ, les n disques sont empilés par ordre croissant de taille sur le piquet n° 1.



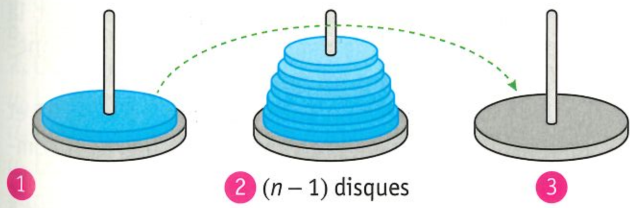
Le but du jeu est de déplacer ces n disques du piquet n° 1 sur un autre, par exemple sur le piquet n° 3, en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un seul disque à la fois et le disque déplacé doit l'être sur l'un des deux autres piquets ;
- un disque ne doit jamais être placé au-dessus d'un disque plus petit que lui

Nous désignerons par u_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour résoudre le problème. Rappelons que n est le nombre de disques.
Vérifier que $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.

Partie B. À la recherche d'une suite récurrente

Pour résoudre le problème général, qui est de trouver u_n quel que soit le nombre n de disques, on peut faire le raisonnement suivant :
Pour déplacer les n disques du piquet n° 1 sur le piquet n° 3, il faudra bien, à un moment donné, déplacer le disque le plus grand du piquet n° 1 au piquet n° 3.
À cet instant, les $n-1$ autres disques seront sur le piquet n° 2 dans la position indiquée sur la figure ci-dessous.



On voit bien que le problème peut se résoudre en trois phases :

- les $n-1$ premiers disques ont été placés sur le piquet n° 2 avec un minimum de déplacements. On aboutit à la situation de la figure ci-dessus ;
- On déplace le grand disque du piquet n° 1 vers le n° 3 ;
- les $n-1$ disques du piquet n° 2 sont empilés sur le piquet n° 3 avec un minimum de déplacements.

a. Expliquer pourquoi on obtient alors $u_n = 2u_{n-1} + 1$.
b. Calculer u_4, u_5, u_6, u_7.

Partie C. Une durée inattendue

1. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = u_n + 1$.
Prouver que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n, puis u_n, explicitement en fonction de n.
3.a. Calculer u_{30}.
b. On suppose qu'il faut 10 secondes pour déplacer un disque en comptant le temps de réflexion et d'hésitation. Combien de temps le jeu durera-t-il avec vingt disques en travaillant jour et nuit ?

161 Somme des *n* premiers carrés

On se propose de calculer $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (pour n entier supérieur ou égal à 1).
On utilisera les notations suivantes :
$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$
$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$
Il s'agit donc de calculer $S_n^{(2)}$.

1.a. Donner une expression de $S_n^{(1)}$ sous forme de fraction.
b. Expliquer pourquoi $S_{n+1}^{(3)} - S_n^{(3)} = (n+1)^3$.
c. Vérifier que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.
d. En déduire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
(n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1\\
(n-2)^3 &= (n-3)^3 + 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1\\
&\vdots\\
3^3 &= 2^3 + 3(2)^2 + 3(2) + 1\\
2^3 &= 1^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1\\
1^3 &= 0^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1
\end{aligned}$$

2. Démontrer que $S_{n+1}^{(3)} = S_n^{(3)} + 3S_n^{(2)} + 3S_n + n + 1$.

INDICATION

Ajouter membre à membre les égalités du 1.d

3. En déduire que $S_n^{(2)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

INDICATION

On pourra utiliser les résultats du 1.a. et du 1.b.

162 Somme des *n* premiers cubes

On se propose de calculer la somme :

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

a. Vérifier que $n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right]^2$ (1)

b. En déduire que $(n-1)^3 = \left[\dfrac{(n-1)n}{2}\right]^2 - \left[\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right]^2$ (2)

c. Démontrer que $S = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

INDICATION

Écrire l'égalité (1) en remplaçant n par $(n-1)$, par $(n-2)$, par $(n-3)$, etc., et ajouter membre à membre les égalités obtenues.

d. En déduire que : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

163 Emprunt : mensualités de remboursement fixes

Monsieur David emprunte 10 000 € au taux mensuel de 0,5 % et il désire rembourser en 48 mensualités fixes m.
À la fin de chaque mois les intérêts sont calculés sur le capital restant à rembourser et ajoutés à ce capital.
La première mensualité interviendra un mois après la réalisation du prêt. Avant le paiement de cette première mensualité, le capital à rembourser sera donc égal à $10\,000\times1{,}005$.
On note u_0 le capital emprunté, donc ici $u_0=10\,000$.
On note u_1 le capital restant dû par Monsieur David au bout d'un mois, après le versement de la 1re mensualité, u_2 le capital restant dû au bout de deux mois après le versement de la 2e mensualité, ..., u_n le capital restant dû après le versement de la n-ième mensualité.

1.a. Expliquer pourquoi $u_1=u_0\times(1+0{,}005)-m$.
b. Expliquer pourquoi, pour tout n entier naturel tel que $n<47$, $u_{n+1}=u_n\times(1+0{,}005)-m$.
c. Expliquer pourquoi $u_{48}=0$.
2.a. On pose $v_n=u_n-\dfrac{m}{0{,}005}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,005 et exprimer v_n en fonction de n, de u_0 et de m.
b. Montrer que $u_n=(1{,}005)^n u_0+m\left(\dfrac{1-(1{,}005)^n}{0{,}005}\right)$.
c. Montrer que $m=\dfrac{u_0\times(1+0{,}005)^{48}\times0{,}005}{(1{,}005)^{48}-1}$ puis calculer m.

Pour les exercices 164 et 165, (u_n) est une suite géométrique, déterminer n.

164 $u_0=1$; $q=2$ et $u_0+u_1+\ldots+u_n=63$.

165 $u_0=2$; $q=3$ et $u_0+u_1+\ldots+u_n=2186$.

166 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=4$ et de premier terme $u_0=3$.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. On note $v_0=u_0$, $v_1=u_{10}$, $v_2=u_{20}$ et plus généralement : $v_n=u_{10n}$.
a. Calculer v_1, v_2, v_3, v_4.
b. Montrer que (v_n) est aussi une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?

167 Oscillations

Un capital de 1 200 € au 1er janvier 2018 a évolué de la façon suivante : il a augmenté de 50 % le 1er février puis diminué de 50 % le 1er mars, puis augmenté de 50 % le 1er avril, puis diminué de 50 % le 1er mai, etc.
Il augmente et diminue alternativement de 50 %.
On note u_0 le capital, en euros, le 1er janvier 2018, u_1 le 1er février, u_2 le 1er mars, u_3 le 1er avril, etc.
On définit ainsi une suite (u_n).
1.a. Calculer les six premiers termes de la suite.
b. Représenter graphiquement ses six premiers termes.
2. On pose $v_0=u_0$, $v_1=u_2$, $v_2=u_4$, $v_3=u_6$, ..., $v_n=u_{2n}$.
a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
3. À partir de quelle date la propriété $v_n<100$ sera-t-elle vraie ?

168 Le marathon TICE

Bertrand a décidé de s'entraîner pour un marathon qu'il doit courir le 1er mai 2019. Il commence l'entraînement le 5 septembre 2018 et décide de courir vingt kilomètres la première semaine et d'ajouter quatre kilomètres de course chaque semaine.
1. Combien de semaines entières séparent le 5 septembre 2018 du 1er mai 2019 ?
2. On note d_1 la distance parcourue la première semaine ($d_1=20$), d_2 la distance parcourue la deuxième semaine, ..., d_n la distance parcourue la n-ième semaine.
a. Calculer d_2, d_3 et d_4.
b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?
Exprimer d_n en fonction de n.
3. Quelle distance Bertrand va-t-il parcourir la dernière semaine avant sa compétition ?
4. À l'aide d'un tableur, on a présenté le numéro de la semaine, la distance parcourue chaque semaine et la distance totale parcourue depuis le début de l'entraînement. On a entré 20 dans les cellules B2 et C2.
a. Quelles formules peut-on entrer dans les cellules B3 et C3 de la feuille de calcul et recopier vers le bas pour compléter les colonnes B et C ?
b. Quelle est la distance totale parcourue par Bertrand à la fin de sa période d'entraînement ?

169 Placements financiers

Les parents de Paul et Carine ont hérité d'une somme de 5 000 euros qu'ils offrent en deux parties égales à leurs enfants : chacun reçoit 2 500 euros.
Paul place la totalité de sa part sur un livret A au taux de 2 % par an à intérêts composés.
Carine place 1 400 euros sur un livret B à 3,5 % par an à intérêts composés et garde le reste chez elle.

On suppose que les deux enfants ne font plus désormais ni retrait ni versement.
Les résultats seront donnés à l'euro près.
1. On note S_n le capital de Paul au bout de n années.
a. Calculer S_1, S_2 et S_3.
b. Montrer que (S_n) est une suite géométrique, puis exprimer S_n en fonction de n.
2.a. On note T_n le capital total (livret et tirelire) de Carine au bout de n années. Calculer T_1, T_2 et T_3.
b. (T_n) est-elle une suite géométrique ?
c. Exprimer T_n en fonction de n.
3. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n								
T_n								

4. En déduire en fonction du nombre d'années, qui de Paul ou de Carine fait le meilleur placement.

170 Des économies pour la santé

Jean et Pierre sont deux jumeaux. Jean, qui est fumeur, dépense 900 € par an pour l'achat de ses cigarettes. Le jour de Noël, en 2016, Pierre, qui ne fume pas et s'inquiète pour la santé de son frère, lui conseille d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il arrêtait de fumer. Il lui propose de placer 900 € tous les ans sur un livret rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 3 %, les intérêts acquis étant versés sur le livret le 31 décembre à minuit.
Jean suit ce conseil. Le 31 décembre 2016, il dépose donc 900 € sur ce livret, les intérêts acquis étant capitalisés le 31 décembre 2017 à minuit, et il s'engage à déposer 900 € sur ce livret tous les ans, le 31 décembre.
1. Quel est le capital disponible sur le livret :
a. le 1er janvier 2018 ?
b. le 1er janvier 2019 ?
2. On note :
u_0 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2016,
u_1 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2017,
u_2 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2018,
et plus généralement, pour tout entier naturel n,
u_n la somme disponible sur le livret le 1er janvier de l'année $2016+n$.
Montrer qu'on a la relation :
$u_{n+1}=1{,}03u_n+900$ (1)
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout naturel n, par :
$v_n=u_n+30\,000$ (2)
a. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.
b. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n en utilisant la relation (1).
c. Exprimer enfin v_{n+1} en fonction de v_n à l'aide de (2).
4.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
5. Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant trente ans.
De quelle somme Jean disposera-t-il le 1er janvier 2047 s'il a arrêté de fumer le 25 décembre 2016 ?

171 Taux annuel d'actualisation

Puisque l'argent placé rapporte des intérêts, il est naturel d'estimer (indépendamment de tout risque de dépréciation de la monnaie) que le fait de disposer de 100 € aujourd'hui a plus de valeur que celui de disposer de 100 € dans un an, et à plus forte raison dans plusieurs années.
Les économistes ont été ainsi amenés à définir la valeur actuelle S_n d'une somme S dont on ne disposera que dans n années. Cette valeur est : $S_n=\dfrac{S}{(1+a)^n}$ où a s'appelle le **taux annuel d'actualisation.**
Avant de se lancer dans l'achat d'un matériel coûteux, il est normal qu'un directeur d'entreprise se livre à une étude de rentabilité de ce matériel, en comparant le prix d'achat de ce matériel aux profits attendus, si tant est qu'il puisse les évaluer avec précision (ce que nous supposerons ici pour simplifier).
Supposons, toujours pour simplifier, que le profit annuel réalisé grâce à ce matériel soit constant et égal à B. Le profit annuel réalisé la nième année après l'achat est donc égal à B ; sa valeur actuelle b_n est donc : $\dfrac{B}{(1+a)^n}$ où a est le taux annuel d'actualisation.
1.a. Montrer que (b_n) est une suite géométrique.
Quelle est la raison de cette suite ?
Quel est son premier terme ?
b. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n\geqslant1$, $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n)=1-q^{n+1}$.
c. Calculer $b_1+b_2+\ldots+b_n$.
Que représente cette somme ?

AIDE

Poser $q=\dfrac{1}{1+a}$ et utiliser 1.b.

2. Plaçons-nous dans l'hypothèse où $B=12\,000$ € et $a=0{,}12$ (12 %).
a. Montrer que la valeur actuelle de la somme des profits réalisés pendant les dix premières années est :
$v=100\,000\left[1-\left(\dfrac{100}{112}\right)^{10}\right]$.
b. À quel prix cet industriel peut-il accepter d'acheter l'équipement neuf s'il veut que celui-ci soit amorti en dix ans ?

172 Périmètres et aires

On considère les carrés C_0, C_1, C_2, …, de côtés respectifs 3 cm, 5 cm, 7 cm, … (chaque carré a un côté de longueur égale à celle du précédent plus 2 cm).

1. Expliquer comment on peut associer une suite, que l'on notera (p_n), aux périmètres des carrés C_0, C_1, C_2, … et une suite, que l'on notera (a_n), à leurs aires.

2.a. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

b. Exprimer p_n en fonction de n.

3.a. Calculer a_0, a_1, a_2.

b. Exprimer a_n en fonction de n.

La suite (a_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

c. Calculer a_{10}.

173 Tirages successifs

Une très grande urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages successifs de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule blanche. On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage ($n = 1\,;2\,;3\ldots$).

1. a. Montrer que $p_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b. Calculer $p_{n+1} - p_n$.

c. En déduire que la suite (p_n) est croissante.

d. La croissance de la suite (p_n) était prévisible, compte tenu de la composition de l'urne. Pourquoi ?

e. La suite (p_n) est-elle arithmétique ?

2. Trouver tous les entiers n tels que $1 - p_n \leqslant \dfrac{1}{20}$.

174 Rendez-vous TICE

Dans un gratte-ciel de 100 étages, l'escalier de secours compte 18 marches par étage.

Julien est au sommet et Denis au bas de l'escalier. Ils décident, par téléphone, de se rejoindre en partant au même instant. Denis monte deux marches par seconde et Julien en descend cinq.

On note respectivement u_0, u_1, u_2, …, u_n et v_0, v_1, v_2, …, v_n le nombre de marches qui séparent Julien et Denis du bas de l'immeuble, au départ puis 1 seconde, 2 secondes, …, n secondes après leur départ.

Ainsi, $u_0 = 1800$ et $v_0 = 0$.

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.

2. Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ?

3.a. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

b. Calculer u_{100} et v_{100}.

4.a. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

b. Quel est le sens de variation de (v_n) ?

5. À l'aide d'un tableur, éditer un tableau permettant d'observer les 400 premiers termes de chaque suite. En déduire le nombre de secondes nécessaires pour que Julien et Denis se rejoignent.

6. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

175 À la recherche d'un cube

On dispose d'une feuille de carton de forme carrée, de côté a, en mm, et d'épaisseur 1 mm. On effectue des découpes successives de la manière suivante :

• 1[re] étape : on découpe la feuille suivant un segment d'extrémités les milieux de deux côtés opposés. On obtient ainsi deux rectangles de côtés a et $\dfrac{a}{2}$, que l'on colle en les superposant bords à bords. On obtient un pavé droit de base rectangulaire et de hauteur 2 mm.

• 2[e] étape : on découpe le pavé obtenu selon un segment parallèle à la largeur du rectangle de base, passant par les milieux des deux longueurs. On obtient ainsi deux carrés de côté $\dfrac{a}{2}$ que l'on colle en les superposant bords à bords. On obtient un pavé droit de base carrée et de hauteur 4 mm.

• 3[e] étape : on procède comme dans la 1[re] étape.

Et ainsi de suite.

On suppose que les découpages peuvent être effectués quelles que soient les dimensions de la base du pavé droit. On veut savoir s'il est possible d'obtenir un cube à une certaine étape.

1. Commençons par analyser le procédé de construction des différents pavés droits obtenus.

a. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n la base du pavé droit est-elle un carré à la fin de l'étape n ?

b. En déduire une condition nécessaire sur n pour que le pavé droit obtenu à la fin de l'étape n puisse être un cube.

2. On note h_n la hauteur, en mm, du pavé droit obtenu à la fin de l'étape n. On pose $h_0 = 1$ mm.

a. Exprimer h_n en fonction de n.

b. Quelle est la nature de la suite (h_n) ?

c. Indiquer une valeur de a et une valeur de n qui permettent d'obtenir un cube à la fin de l'étape n.

d. Indiquer une valeur de a pour laquelle on ne pourra jamais obtenir un cube.

3. Trouver toutes les valeurs de a pour lesquelles on obtiendra un cube à une certaine étape.

Olympiades

176 Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Démontrer que $\dfrac{2}{a-b}$, $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{2}{a-c}$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

177 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1+\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{x-1}\right)^7=0.$$

Chercheurs d'hier

La croissance géométrique

La croissance géométrique est illustrée par l'**un des plus vieux problèmes de numération** :

« Quel est le nombre total de grains que contient un damier de 64 cases si, partant de la première case portant un grain, sur chaque case successive on double le nombre de grains ? »

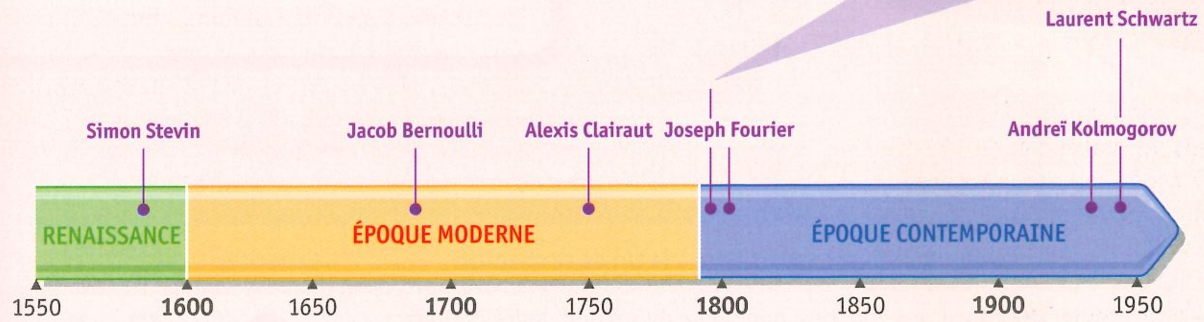
Ce problème apparaît dans les textes mathématiques les plus anciens : 1 000 ans avant J.-C. en Chine, en Chaldée, en Égypte.

La notion de suite apparaît dans les *Éléments* d'Euclide, daté d'environ 300 avant J.-C. Le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique, comme celle formée par les entiers impairs 1, 3, 5, 7, …, $2n-1$, est sans doute beaucoup plus ancien encore.

La notion de suite, avec sa notation $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8$, …, $u_n = 2^{n-1}$, a été souvent utile, historiquement, par exemple pour comprendre, dans le cas du damier, que le résultat ne dépend pas du chemin parcouru pour traverser toutes les cases une fois seulement, même si à présent ce résultat peut sembler évident.

Plus récemment, les suites interviennent en Économie. Ainsi par exemple, au début du 19[e] siècle, l'Anglais **Thomas Malthus** a opposé deux formes de croissance, **la croissance de type géométrique d'une population**, et **la croissance de type arithmétique d'une production**.

Thomas Malthus
(1766-1834)



À la même époque

En France

Entre 1802 et 1804, **Napoléon 1[er]** reconstruit la société et crée notamment le franc germinal, le code civil, les lycées et la légion d'honneur. Il est membre de l'Académie des Sciences depuis 1797.

Napoléon 1[er]
(1769-1821)

À la même époque

En Allemagne

Héritier de Mozart, **Ludwig van Beethoven** est le précurseur du romantisme en Allemagne. Ses neuf symphonies et ses sonates pour piano marqueront l'histoire de la musique.

Beethoven
(1770-1827)