BTS CG 1ére Année	Fiche n°9 : Propositions et prédicats **Utiliser des propositions**

1. Ce qu'il faut savoir :

A/ Proposition

Définition

Une proposition est une phrase (un énoncé), mathématique ou non, telle que l'on peut dire sans ambiguïté si elle est Vraie ou si elle est Fausse.

VRAI – FAUX sont les valeurs de vérité. On utilise souvent 1 pour Vrai et 0 pour Faux.

Exemples :

Proposition	Valeur de vérité
A : « la distance Paris – Lyon est supérieure à 150 kms »	
B : « 3 élevé au carré est égal à 10 »	
C : « La hauteur de la Tour Eiffel est inférieur à 200 m »	
D : « un chômeur est une personne active »	
E : « un moi a au plus 31 jours »	

F : « dans la classe, au moins un élève est absent » n'est pas une proposition en tant que telle. Mais, si on connait la classe et l'instant ou on fait l'appel, la phrase devient une proposition, car on peut dire si cette phrase est vraie ou fausse.

B/ Connecteurs logiques

P et Q étant deux propositions, on peut former d'autres propositions en utilisant des connecteurs logiques.

Connecteur NEGATION

On appelle **négation** de la proposition P, notée non P, $\overline{P}$ ou encore $\neg$ P, la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et réciproquement.

C'est le seul connecteur qui ne porte que sur une proposition. On a donc la table de vérité suivante :

P	$\neg$ P
F	
V	

Exemples

P	$\neg P$
$x > 4$	
$x \in \mathbb{N}$	
A, B, C alignés	
(D) et (D') secantes	

Connecteur CONJONCTION

On appelle **conjonction** des propositions P et Q, notée P et Q, ou $P \wedge Q$, la proposition qui est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies. Ce connecteur correspond au ET.

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Exemples

P	Q	$P \wedge Q$
$x < 10$	$x>2$	
$ABCD$ losange	$ABCD$ rectangle	

Connecteur DISJONCTION

On appelle **disjonction** des propositions P et Q, notée P et Q, ou $P \vee Q$, la proposition qui est fausse lorsque les deux propositions P et Q sont simultanément fausses. Le proposition $P \vee Q$ est vraie dans tous les autres cas. Ce connecteur correspond au OU inclusif, au sens de « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ».

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Exemples

P	Q	$P \vee Q$
$x < 2$	$x > 10$	
n multiple de 3 inférieur à 10	n pair inférieur à 10	

Connecteur IMPLICATION

On appelle **implication** des propositions P et Q, notée P $\Rightarrow$ Q, la proposition qui est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse. Le proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie dans tous les autres cas. Ce connecteur correspond au SI…ALORS.

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Exemples

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$x = -2$	$x^2 = 4$	
ABC équilatéral	ABC isocèle	

Connecteur EQUIVALENCE

On appelle **équivalence** des propositions P et Q, notée P $\Leftrightarrow$ Q, la proposition qui est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraie simultanément. Le proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie dans tous les autres cas. Ce connecteur correspond au SI ET SEULEMENT SI.

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Exemples

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
$x^2 = 4$	$x = 2$ ou $x = -2$	
ABC triangle rectangle en A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	

2. Comment démontrer une équivalence ?

- **Une situation : énoncé de l'exercice**

Démontrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

- **Méthode de résolution**

On écrit la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On écrit la table de vérité de $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

On conclut

EXERCICES

1/ Appliquer ce résultat pour écrire des propositions équivalentes aux propositions suivantes :

a) « si la télévision est allumée, alors quelqu'un la regarde »

b) « si ce champignon est vénéneux, alors vous serez malade »

c) « si vous êtes client de notre société, alors vous êtes moderne »

d) $(x > 1) \Rightarrow (x^2 > 1)$

e) $(y^2 \neq 12) \Rightarrow (y \geqslant 3)$

f) $((z > 3) \vee (z \geqslant 1)) \Rightarrow (z^2 = 4)$

g) $((t > 2) \wedge (t \leqslant -3)) \Rightarrow ((t \neq 1) \vee (t < 7))$

2/ Mon voisin m'a dit : « si je gagne au loto, alors je m'achète une nouvelle voiture ».
Puis-je en déduire quelque chose dans les cas suivants ?

a) je vois qu'il s'est acheté une nouvelle voiture

b) je vois qu'il a toujours son ancienne voiture

c) j'ai appris qu'il avait gagné au loto

d) j'ai appris qu'il n'avait toujours pas gagné au loto

3/ J'affirme que : « Lorsqu'il ne pleut pas, je vais faire un jogging ».
Pouvez-vous en déduire quelque chose dans les cas suivants ?

a) hier, je ne suis pas allé faire un jogging

b) il pleut

c) il y a 3 jours, je suis allé faire un jogging

d) il n'y a pas un nuage dans le ciel