1S - Devoir maison n°4 – rapport détaillé des copies.

Remarques préliminaires : qualité des documents :

Je reçois des documents de qualité inacceptable :

- j'ai précisé que je n'acceptais pas les jpeg, un élève envoie néanmoins une vague photo. La prochaine fois je n'ouvre même pas le document, je considère le devoir non rendu.
  Ce n'est par ailleurs pas à moi d'effectuer les manipulations nécessaires pour mettre en forme la copie. C'est votre travail. Vous avez en charge 1 copie, j'en reçois par centaines ! Un peu de respect pour mon travail SVP.
- Je reçois des documents à l'envers, avec les pages dans le désordre, ou illisibles : même remarque que précédemment : Vous avez en charge 1 copie, j'en reçois par centaines ! Un peu de respect pour mon travail SVP. La prochaine fois, le devoir sera considéré comme non rendu.
- La conjonction de coordination CAR est strictement interdite
- $\Leftrightarrow$ signifie « si et seulement si »
- = signifie « est égal à »

Exercice 1 :

1. ► Faire un schéma illustrant la formation des premiers termes de (U_n) : on ne demande pas de placer des croix dans le plan, mais de construire les premiers termes de la suite.
   ► La suite est définie par une relation de récurrence du type $U_{n+1} = f(U_n)$. La construction des termes s'effectue à l'aide de la courbe de la fonction f et de la droite miroir : la droite Δ d'équation $y = x$ qui permet de renvoyer une valeur de l'axe des ordonnées vers l'axe des abscisses (voir le cours !)
   On a en particulier $U_1 = f(U_0)$; $U_2 = f(U_1)$; $U_3 = f(U_2)$ etc….
   ► Unité 4cm ou 4 carreaux : cela parle de soi ! respectez les consignes
   ► Ecrire correctement : U_{n+1}

2. ►Il faut faire une démonstration par récurrence : bien soigner l'expression, étape après étape il faut fabriquer et mettre en forme l'expression de U_{k+1}

3. ► « Sens de variation positif » : cela ne veut rien dire ! Je ne veux donc plus voir cela.
   ► « Le sens de variation de la suite est croissant » : cela ne veut rien dire ! On écrit « La suite est croissante ».

   ► « La raison est positive…. » Où est-il question de raison ? De plus on ne parle de raison que pour une suite arithmétique ou une suite géométrique. La suite n'est ici ni arithmétique, ni géométrique. Cela a déjà été vu en Kahoot. Il a même été précisé que ce genre de suite est appelé « arithmético-géométrique »

   ► Pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$. On aura besoin de faire le lien avec les questions précédentes : pour connaître le signe de $U_{n+1} - U_n$ on va en particulier devoir utiliser que la suite (U_n) est majorée par 2, ce qui signifie que $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \le 2$.

4. ► Il faut faire une démonstration par récurrence : bien soigner l'expression, étape après étape il faut fabriquer et mettre en forme l'expression de U_{k+1} pour aboutir à l'expression voulue. Des factorisations s'imposent.

► A propos de l'expression $U_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

Atrocité vue dans plusieurs copies (recopiage sans aucune réflexion) :

Je cite : « (U_n) est suite arithmétique sous la forme ax+b tel que $a = -2$; b = 2 »
Déjà il faudrait écrire en français : « est une suite » et non « est suite »
Ensuite, qu'est- ce donc que ce ax +b ??? j'ai beau chercher je ne vois de x nulle part…

Peut-être an + b ? Même pas…. Vous voyez bien que le n est en puissance !! $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

► Attention aux lacunes en calcul.

5. $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ce n'est donc pas $0+1+2+3+...+n$

► revoir les propriétés de linéarité de la somme :

c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} aU_k + bV_k = \sum_{k=0}^{n} aU_k + \sum_{k=0}^{n} bV_k = a\sum_{k=0}^{n} U_k + b\sum_{k=0}^{n} V_k$

Je vous conseille vivement de décortiquer ce rapport de correction.

Exercice 2

► L'énoncé laisse supposer de façon évidente que plusieurs cas sont à distinguer.
Faire le lien avec le cours sur la limite de q^n

Exercice 3 : VRAI/ FAUX corrigé à connaître

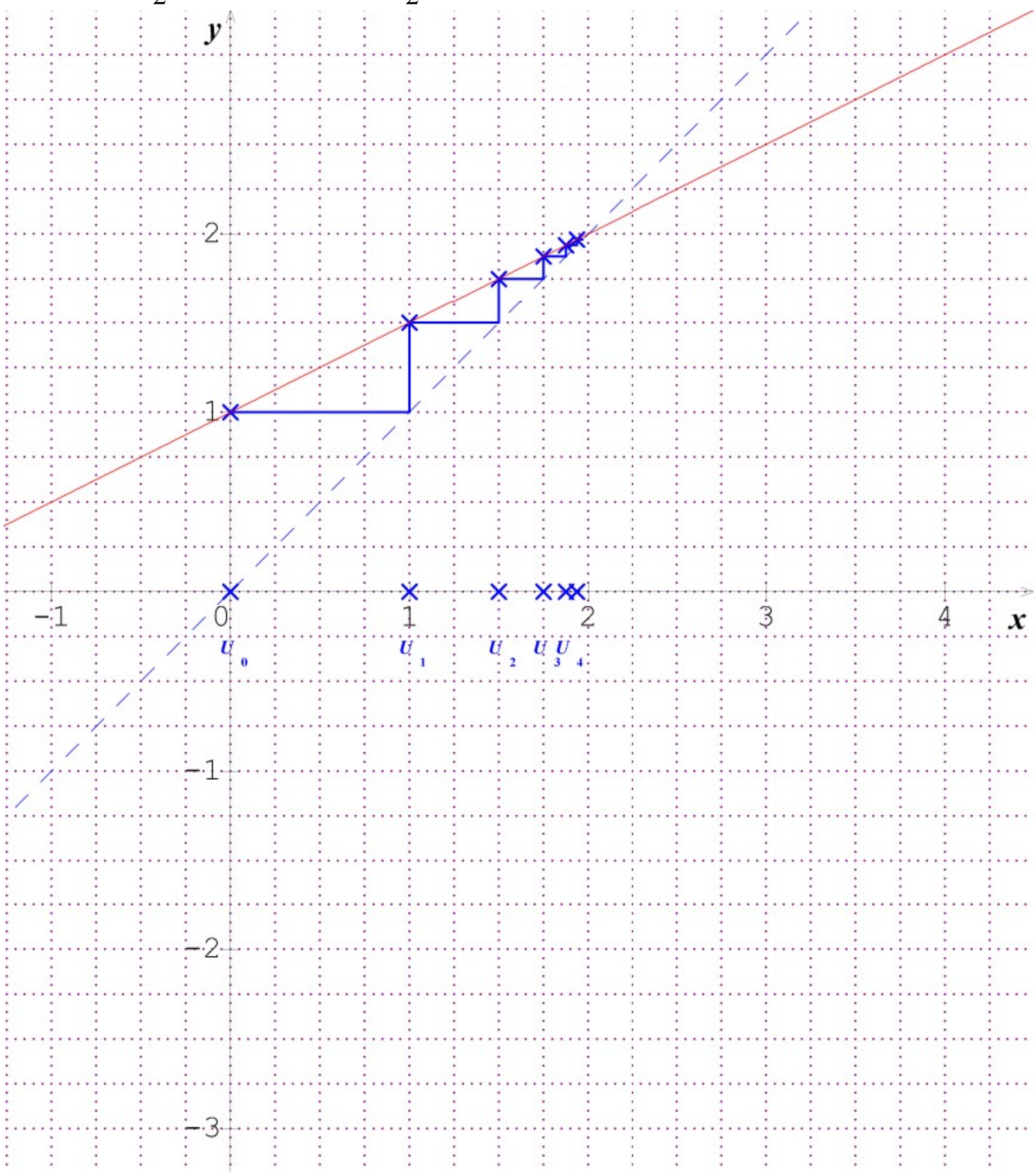
1S-EXERCICES SUR LES SUITES – DEVOIR MAISON N°4- CORRIGE DETAILLE
A CONNAITRE ET APPLIQUER RIGOUREUSEMENT

EXERCICE 1

(U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1. Faire un schéma illustrant la formation des premiers termes de (U_n) (Unité 4cm ou 4 carreaux)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ alors $f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 1 = U_{n+1}$



2. Montrer que (U_n) est majorée par 2.

   (U_n) est majorée par 2 $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \ U_n \leq 2$

   Démontrons par récurrence sur n que (U_n) est majorée par 2

   Posons P(n) : « $U_n \leq 2$ »

- **Initialisation**

  On a $U_0 = 0$ donc P(0) : «$U_0 \leq 2$ » est une proposition VRAIE

- **Hérédité**

  On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que P(k) : « $U_k \leq 2$ » est VRAIE

  Montrons qu'alors, P(k + 1) : « $U_{k+1} \leq 2$ » est VRAIE

  (début de la démonstration)

  On a $U_k \leq 2$ par hypothèse de récurrence.

  Or $U_{k+1} = \frac{1}{2}U_k + 1$

  On en déduit que $U_{k+1} \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1$ soit : $U_{k+1} \leq 2$ ■

  La propriété est héréditaire, et est initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ U_n \leq 2$ donc (U_n) est majorée par 2

3. Donner le sens de variation de (U_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - U_n = \left[\frac{1}{2}U_n + 1\right] - U_n = -\frac{1}{2}U_n + 1$$

Or, d'après 2-) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ U_n \leq 2$

d'où $-\frac{1}{2}U_n \geq -\frac{1}{2} \times 2$ (on multiplie membre à membre par une

d'où $-\frac{1}{2}U_n \geq -1$ quantité négative, on obtient donc une

d'où $-\frac{1}{2}U_n + 1 \geq 0$ inégalité de sens contraire)

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ U_{n+1} - U_n \geq 0$ donc (U_n) est croissante

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

Posons P(n) : « $U_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ »

- **Initialisation**

D'une part : on a $U_0 = 0$

D'autre part : $2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^0\right] = 2(1-1) = 2\times 0 = 0$

donc P(0) : «$U_0 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$ » est une proposition VRAIE

- **Hérédité**

On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que P(k) : « $U_k = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$ » est VRAIE

Montrons qu'alors, P(k + 1) : « $U_{k+1} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$ » est VRAIE

(début de la démontration)

On a $U_k = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$ par hypothèse de récurrence.

Or $U_{k+1} = \frac{1}{2}U_k + 1$ par définition de la suite U.

On a donc :

$$U_{k+1} = \frac{1}{2}\times 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]+1 = 2\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]+2\times\frac{1}{2} = 2\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\frac{1}{2}\right] = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right] \quad \blacksquare$$

(il faut 2 en facteur dans l'expression de U_{k+1}, on met donc 2 en facteur et on fait entrer le facteur $\frac{1}{2}$ dans le crochet. Ce n'est que de la mise en forme puisque l'on sait le résultat que l'on veut obtenir !!)

La propriété est héréditaire, et est initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$: on a donc à présent la forme explicite de la suite

5. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \;\; S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$. Exprimer S_n en fonction de *n*.

Linéarité de l'opérateur Σ (vu en TD)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i \qquad = \sum_{i=0}^{n} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right] = 2\times\sum_{i=0}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right] = 2\times\sum_{i=0}^{n}1 - 2\times\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Pause pédagogique dans le calcul …

$\sum_{i=0}^{n} 1 = 1+1+......1$: on effectue (n+1) fois la somme 1 + 1 + …. Cela donne donc $(n+1)$

$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Donc $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = 2(n+1) - 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

6. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

D'une part :

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

- $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4$

D'autre part :

- $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2(n+1) = +\infty$

Par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

REMARQUE : INTRODUCTION D'UNE SUITE AUXILIAIRE – METHODE A CONNAITRE

Par construction des termes successifs de (U_n) on conjecture que (U_n) est croissante et majorée, et que sa limite est de 2 (point fixe)

On définit la suite auxiliaire (V_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n = U_n - 2$$

Démontrons que (V_n) est une suite géométrique. (cela permettra de donner sa forme explicite !!)

(V_n) est une suite géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q \times V_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n = U_n - 2$ on a donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 2$

Or par définition de la suite (U_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 2) - 1 = \frac{1}{2}V_n$

Rappel : on cherche à exprimer V_{n+1} en fonction de V_n afin de montrer que la suite V est géométrique.

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 2 = -2$

On en déduit donc sa forme explicite :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times q^n$, soit, $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n - 2 \Leftrightarrow U_n = V_n + 2$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left[1 - \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \blacksquare}$$

EXERCICE 2

(U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ telle que $U_2 = 1$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ donné. Discuter suivant λ la valeur éventuelle de $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n.U_n$

Solution :

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $U_2 = 1$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n = U_2 \times q^{n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lambda^n.U_n = \lambda^n.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \lambda^n.\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \lambda^n.\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \lambda^n.\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16.\lambda^n.\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= 16.\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n$$

- Si $-1 < \frac{\lambda}{4} < 1$ c'est-à-dire Si $-4 < \lambda < 4$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 16.\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n.U_n = 0$

- Si $\frac{\lambda}{4} \le -1$ c'est-à-dire Si $\lambda \le -4$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n$ n'existe pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} 16.\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n.U_n$ n'existe pas.

- Si $\frac{\lambda}{4} = 1$ c'est-à-dire Si $\lambda = 4$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 16.\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n.U_n = 16$

- Si $\frac{\lambda}{4} > 1$ c'est-à-dire Si $\lambda > 4$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 16.\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n.U_n = +\infty$

EXERCICE 3 Vrai / faux

1. La suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_n = n \ si \ n \leq 100\ 000 \\ U_n = \dfrac{1}{n} \ si \ n > 100\ 000 \end{cases}$ converge vers 0.

VRAI : seules les « grandes » valeurs de n comptent et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

2. Si la suite (U_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 10^{-50} < \dfrac{U_n}{n} < 10^{-30}$ alors (U_n) converge vers 0.

FAUX : On a en particulier $U_n > 10^{-50} \times n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^{-50} \times n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Culture mathématique : <u>Définition mathématique de la limite infinie d'une suite :</u>

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$ alors $U_n > A$

Cela signifie qu'aussi grand soit le nombre A de notre choix, il existera toujours un rang N à partir du quel les termes de la suite seront plus grand que ce nombre A.

Dans notre exemple, quel que soit le nombre entier A de notre choix, il suffit de prendre $N = 10^{50} \times A$ alors on aura $U_N > A$ et donc si $n > N$ alors $U_n > A$