1S - Devoir de mathématiques n°1 (2heures)

corrigé

EXERCICE 1 : **2 points**

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r telle que $U_0 = -175$.
Déterminer r et l'entier n tel que $U_n = 35$ et $U_0 + U_1 + ... + U_n = -2170$

Solution :

On a $U_0 + U_1 + ... + U_n = (n+1)\left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-175+35}{2}\right) = -70(n+1)$

Sachant que $U_0 + U_1 + ... + U_n = -2170$, on en déduit donc que $n+1 = \frac{-2170}{-70} = 31$ d'où $\boxed{n = 30}$

On a alors $U_{30} = 35$

Or $U_{30} = U_0 + 30r$ donc $\boxed{r = \frac{U_{30} - U_0}{30} = \frac{35+175}{30} = 7}$

EXERCICE 2 : **3 points**

1. $S = U_0 + U_1 + ... + U_9 = \alpha\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \alpha.\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = 2\alpha.\frac{1023}{1024} = \frac{1023}{512}\alpha$
2. $S' = V_0 + V_1 + ... + V_9 = 10 \times \left[\frac{V_0 + V_9}{2}\right] = 10 \times \left[\frac{\alpha + \alpha + 9 \times 2}{2}\right] = 10 \times (\alpha + 9) = 10\alpha + 90$
3. $S = S' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1023}{512}\alpha = 10\alpha + 90$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\left(\frac{1023}{512} - 10\right) = 90$$

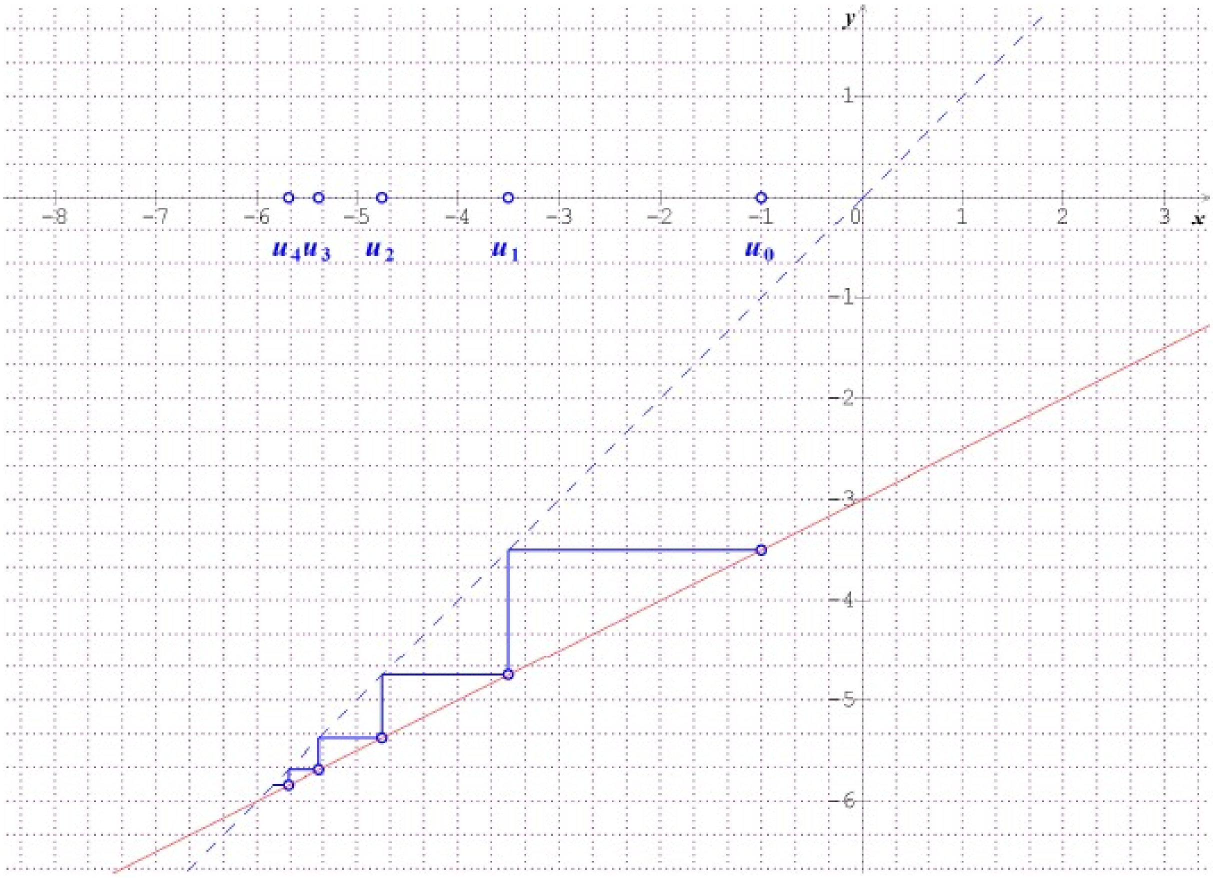
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4097}{512}\alpha = 90$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = 90 \times \left(-\frac{512}{4097}\right) = -\frac{46080}{4097}}$$

EXERCICE 3 : **5 points**

Soit (U_n) la suite telle que $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$

1. Faire un schéma illustrant la formation des premiers termes de (U_n) (unités 1cm ou 1 carreau)



2. Montrer que (U_n) est minorée par -6

(U_n) est minorée par $-6 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \;\; U_n \geq -6$

Démontrons par récurrence sur n que (U_n) est minorée par – 6

Posons P(n) : « $U_n \geq -6$ »

- **Initialisation**

On a $U_0 = -1$ donc P(0) : «$U_0 \geq -6$ » est une proposition VRAIE

- **Hérédité**

On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que P(k) : « $U_k \geq -6$ » est VRAIE

Montrons qu'alors, P(k + 1) : « $U_{k+1} \geq -6$ » est VRAIE

(début de la démontration)

On a $U_k \geq -6$ par hypothèse de récurrence.

Or $U_{k+1} = \frac{1}{2}U_k - 3$

On en déduit que $U_{k+1} \geq \frac{1}{2} \times 2 - 3$ soit : $U_{k+1} \geq -6$ ■

La propriété est héréditaire, et est initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_n \geq -6$ donc (U_n) est minorée par – 6

3. Donner le sens de variation de (U_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - U_n = \left[\frac{1}{2}U_n - 3\right] - U_n$$
$$= -\frac{1}{2}U_n - 3$$

Or, d'après 2-) $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \geq -6$

d'où $-\frac{1}{2}U_n \leq -\frac{1}{2} \times (-6)$ (on multiplie membre à membre par une

d'où $-\frac{1}{2}U_n \leq 3$ quantité négative, on obtient donc une

d'où $-\frac{1}{2}U_n - 3 \leq 0$ inégalité de sens contraire)

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n \geq 0$ donc (U_n) est décroissante

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$.

On définit la suite auxiliaire (V_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n = U_n - (-6)$$

Démontrons que (V_n) est une suite géométrique. (cela permettra de donner sa forme explicite !!)

(V_n) est une suite géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q \times V_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n + 6$ on a donc $V_{n+1} = U_{n+1} + 6$

Or par définition de la suite (U_n) : $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}U_n + 3$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n - 6) + 3$ Rappel : on cherche à

$= \frac{1}{2}V_n$ exprimer V_{n+1} en fonction de V_n afin de montrer que la suite V est géométrique.

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 6 = 5$

On en déduit donc sa forme explicite :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times q^n$, soit, $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n + 6 \Leftrightarrow U_n = V_n - 6$

$$\boxed{\text{Donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 \blacksquare}$$

AUTRE METHIODE

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

Posons P(n) : « $U_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$ »

- **Initialisation**

  D'une part : on a $U_0 = -1$

  D'autre part : $5\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 6 = -1$

  donc P(0) : «$U_0 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 6$ » est une proposition VRAIE

- **Hérédité**

  On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que P(k) : « $U_k = 5\left(\frac{1}{2}\right)^k - 6$ » est VRAIE

  Montrons qu'alors, P(k + 1) : « $U_{k+1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 6$ » est VRAIE

  (début de la démontration)

  On a $U_k = 5\left(\frac{1}{2}\right)^k - 6$ par hypothèse de récurrence.

  Or $U_{k+1} = \frac{1}{2}U_k - 3$ par définition de la suite U.

  On a donc : $U_{k+1} = \frac{1}{2} \times \left[5\left(\frac{1}{2}\right)^k - 6\right] - 3 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 3 - 3 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 6 \quad \blacksquare$

  La propriété est héréditaire, et est initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}\ U_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 \text{ : on a donc à présent la forme explicite de la suite}}$$

5. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$
   a. Calculer S_n

Linéarité de l'opérateur Σ (vu en TD et en DM4)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i \qquad = \sum_{i=0}^{n} 5\left(\frac{1}{2}\right)^i - 6 = 5 \times \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{n} 6$$

Pause pédagogique dans le calcul …

$\sum_{i=0}^{n} 6 = 6 + 6 + ...6$: on effectue (n+1) fois la somme 6 + 6 + …. Cela donne donc $(n+1) \times 6$

$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Donc $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = 5 \times 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1) = 10\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1)}$

   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

D'une part :

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

- $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} 10\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 10$

D'autre part :

- $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} -6(n+1) = -\infty$

Par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

EXERCICE 4 : **4 points**

1. Voir rapport de DM3
2.

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$6-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

EXERCICE 5 : **6 points**

Organisons l'information :

Augmenter de 2% revient à multiplier par $1+\dfrac{2}{100}=1,02$

De même, augmenter de 3,5% revient à multiplier par 1,035

1. On note S_n le capital acquis de Paul au bout de n années.
   a. Calculer S_1, S_2 et S_3.

$$\underset{2500}{S_0} \overset{\times 1,02}{\xrightarrow{+2\%}} \underset{2550}{S_1} \overset{\times 1,02}{\xrightarrow{+2\%}} \underset{2601}{S_2} \overset{\times 1,02}{\xrightarrow{+2\%}} \underset{2653,02}{S_3}$$

   b. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le schéma suivant : $S_n \overset{\times 1,02}{\xrightarrow{+2\%}} S_{n+1}$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q = 1,02 donc la suite est géométrique de raison q = 1,02 et de premier terme $S_0 = 2500$

   c. Exprimer S_n en fonction de n : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n = S_0 \times q^n = 2500 \times 1,02^n}$

2. On note T_n le capital acquis de Carine au bout de n années.

   a. Calculer T_1, T_2 et T_3.

   Posons t_n le capital de Carine acquis à la banque au bout de n années.
   On a $t_0 = 1400$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 1100 + t_n$

$$\underset{1400}{t_0} \xrightarrow[\times 1{,}035]{+3{,}5\%} \underset{1449}{t_1} \xrightarrow[\times 1{,}035]{+3{,}5\%} \underset{1499{,}72}{t_2} \xrightarrow[\times 1{,}035]{+3{,}5\%} \underset{1552{,}21}{t_3}$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n = 1100 + t_n$ d'où :

$$\underset{2500}{T_0} \longrightarrow \underset{2549}{T_1} \longrightarrow \underset{2599{,}72}{T_2} \longrightarrow \underset{2652{,}21}{T_3}$$

   b. La suite (T_n) est-elle géométrique ?

D'une part $\frac{T_1}{T_0} = \frac{2549}{2500} = 1{,}0196$ | D'autre part $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2599{,}72}{2549} \approx 1{,}0199$

Le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant, donc la suite T n'est pas géométrique.

   c. Exprimer T_n en fonction de n.

   (t_n) est géométrique de raison $q = 1{,}035$ et de premier terme $t_0 = 1400$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times q^n = 1400 \times 1{,}035^n$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{T_n = 1100 + 1400 \times 1{,}035^n}$

3. Qui de Paul ou Carine fait le meilleur placement ?

A la calculatrice, on dresse le tableau de valeurs des premiers termes de la suite.
avec la calculatrice en mode TABL, on saisit la forme explicite de chacune des deux suites et on remplace n par x. On paramètre un pas de 1 entre les valeurs de x (x remplace n qui est un entier !)
On peut aussi se mettre en mode SUITE

X	Y1	Y2
0	2500	2500
1	2550	2549
2	2601	2599.7
3	2653	2652.2

X	Y1	Y2
4	2706	2706.5
5	2760.2	2762.7
6	2815.4	2820.9
7	2871.7	2881.1

On voit qu'à l'issue de la 4$^{\text{ème}}$ année de placement, le placement de Carine est plus avantageux.

BONUS : **1,5 point**

1. $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \dfrac{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = 1$

2. $\sqrt{n^2+n+1} - n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)} = \dfrac{n^2+n+1-n^2}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}$

$$= \frac{n+1}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \dfrac{1}{2}$