I RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 FONCTION

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

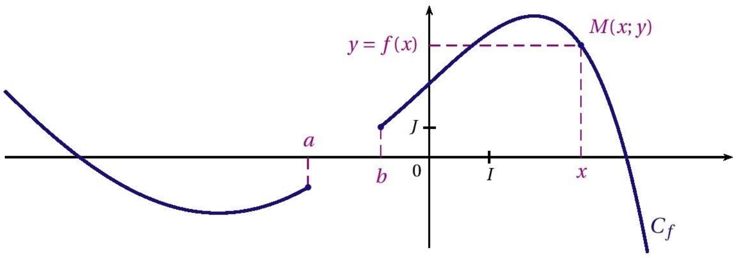
— $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.

— Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.

— Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.



C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$

3 VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \leqslant f(b)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \geqslant f(b)$$

On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

REMARQUE

On dit que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

EXTREMUM

— Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.

— Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts $x_1 \neq x_2$, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

VARIATION

Soit a et b deux réels.

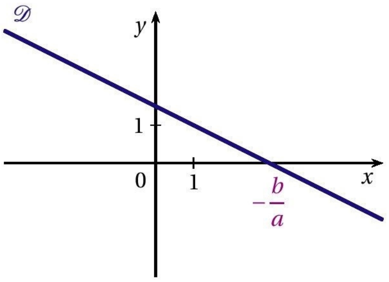
— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

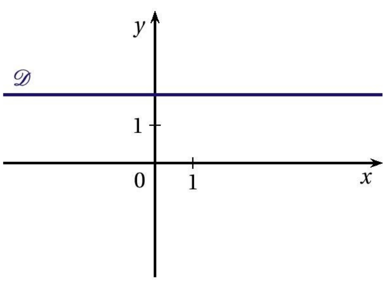
COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.

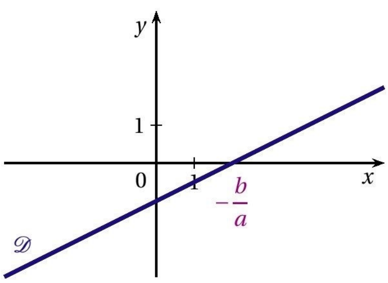
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



2 – FONCTION VALEUR ABSOLUE

VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x est égale à la distance de ce nombre à 0. Elle est notée $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

EXEMPLES :

$|2| = 2$; $|-3| = 3$; $\left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}$; $1 - \left|-\dfrac{4}{3}\right| = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$

REMARQUES :

$|x| = |-x|$;
$|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

ÉTUDE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

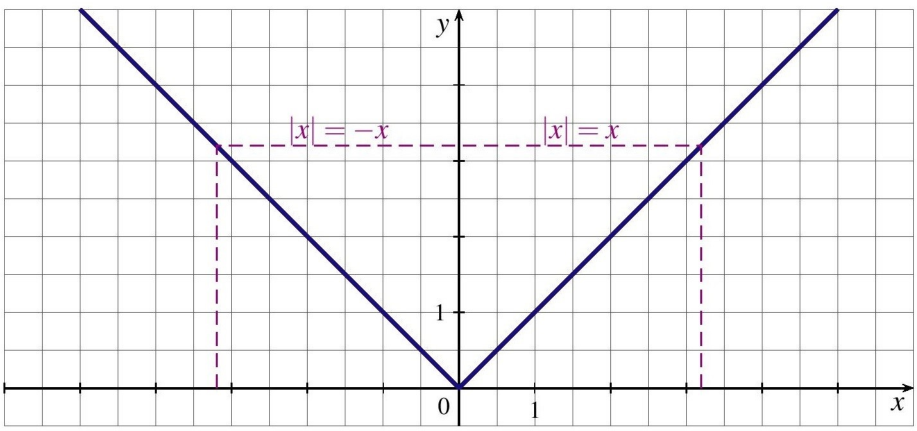
La fonction $f : x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine par morceaux. En effet :
– sur l'intervalle $]-\infty;0]$, $f(x) = -x$;
– sur l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x) = x$.

VARIATIONS :

La fonction valeur absolue définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$ est :
– strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$;
– strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	↘	0	↗

COURBE REPRÉSENTATIVE :



3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

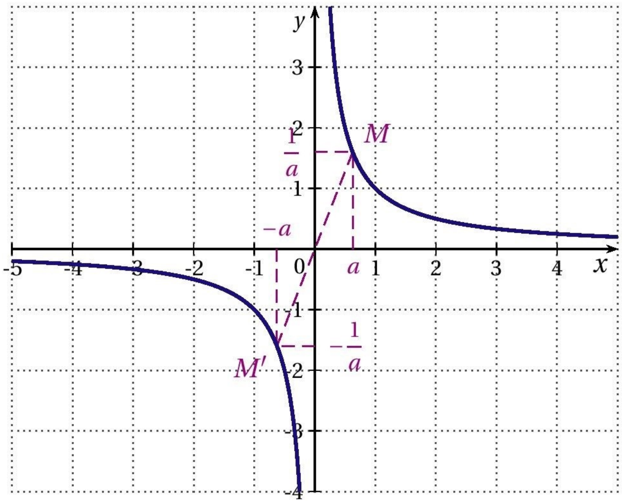
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\left(a; f(a)\right)$ et $M'\left(-a; f(-a)\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

— On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) , et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $\left(\sqrt{x}\right)^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ seulement pour $x \geqslant 0$.

— $\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{x^2}=x. \\ \text{Si } x \leqslant 0, \text{ alors } -x \geqslant 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2}=-x. \end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0{,}5)^2}=\sqrt{0{,}25}=0{,}5$$

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x)=\sqrt{x}$ est strictement croissante.

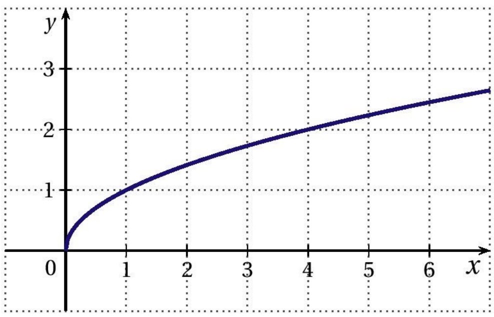
✻ DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leqslant a < b$:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

Comme $0 \leqslant a < b$, alors $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)>0$. Par conséquent, $a-b$ et $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ sont de même signe.
Ainsi, si $a-b<0$ alors $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0$ soit $f(a)<f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



5 FONCTION CUBE

DÉFINITION

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^3$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

❊ DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

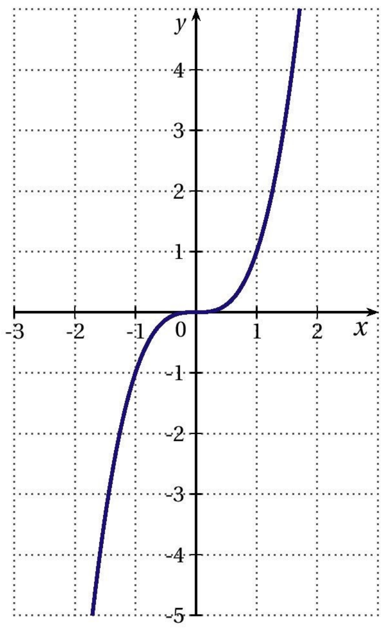
— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.

— Si a et b sont de même signe :
Pour tous réel a et b on a

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$. Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a - b)$.
Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



III FONCTIONS ASSOCIÉES FONCTION $f: x \mapsto u(x)+k$

1 – VARIATIONS

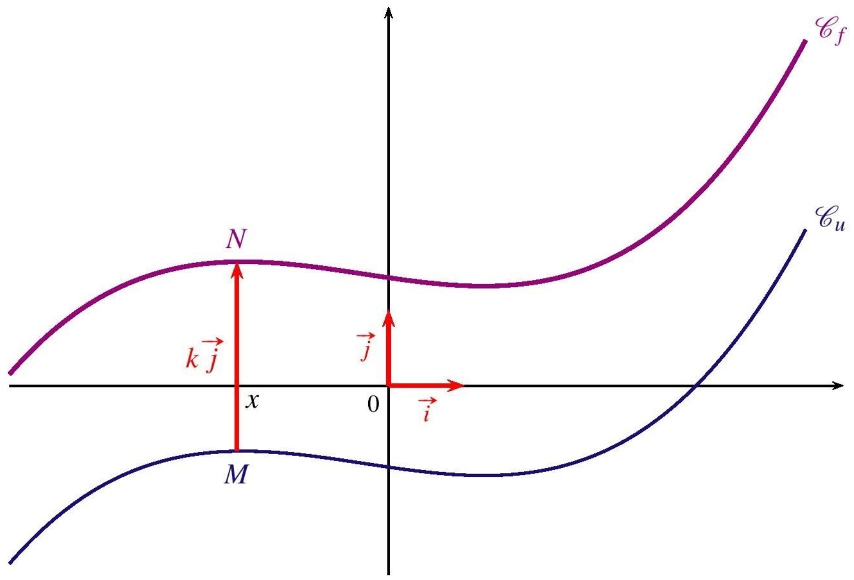
Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
f est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle I par $f(x)=u(x)+k$.
Les fonctions u et f ont les mêmes variations sur I

✻ DÉMONSTRATION

Supposons que la fonction u soit strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$ de I.
Pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[a;b]$, si $x_1<x_2$ alors $u(x_1)<u(x_2)$, d'où $u(x_1)+k<u(x_2)+k$, soit $f(x_1)<f(x_2)$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$.
On démontre de la même manière que si u est strictement décroissante sur un intervalle $[a;b]$ de I, alors f est aussi strictement décroissante sur $[a;b]$.

2 – COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
f est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle I par $f(x)=u(x)+k$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, est l'image de la courbe $\mathscr{C}_u$, représentative de la fonction u, par la translation de vecteur $k\vec{j}$



✻ DÉMONSTRATION

Soit $N(x;y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ alors

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=u(x)+k \Leftrightarrow y-k=u(x)$$

Donc le point $M(x;y-k)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_u$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\overrightarrow{MN}(0;k)$ d'où $\overrightarrow{MN}=k\vec{j}$.
Par conséquent, N est l'image du point M par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

IV FONCTIONS ASSOCIÉES : FONCTION $f : x \mapsto u(x+k)$

1 – VARIATIONS

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
J est l'intervalle constitué des réels $x-k$, avec x dans I.
f est la fonction définie sur l'intervalle J par $f(x) = u(x+k)$.
Pour tout intervalle $[a;b]$ où u est monotone, la fonction f a les mêmes variations sur $[a-k;b-k]$ que la fonction u sur $[a;b]$

REMARQUE :

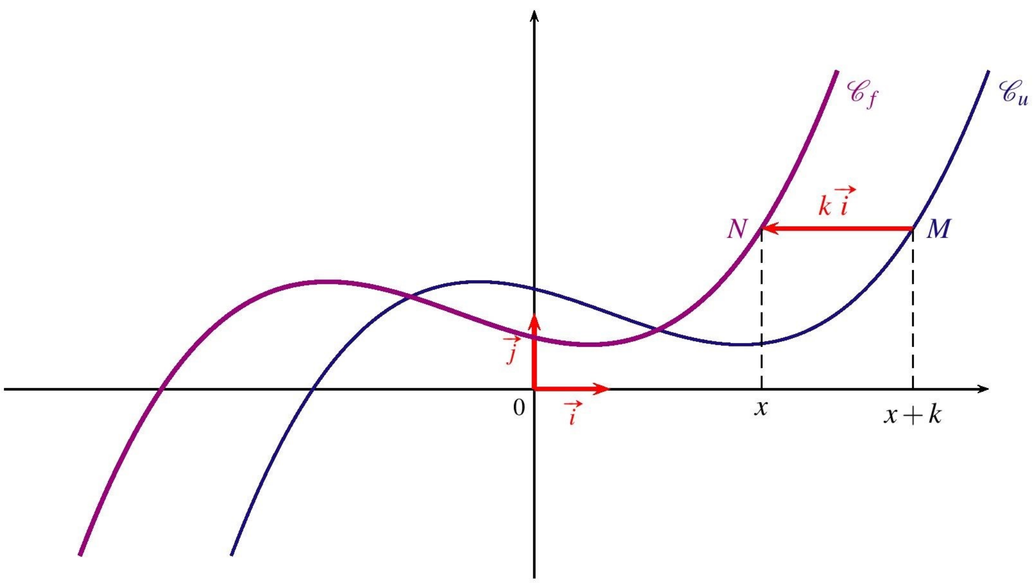
Si la fonction u est définie sur un intervalle $[a;b]$, on peut calculer $u(x+k)$ seulement lorsque $x+k \in [a;b]$ soit pour $x \in [a-k;b-k]$.

✻ DÉMONSTRATION

Supposons que la fonction u soit strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[a-k;b-k]$, si $x_1 < x_2$ alors $x_1+k < x_2+k$ avec x_1+k et x_2+k dans l'intervalle $[a;b]$, d'où $u(x_1+k) < u(x_2+k)$, soit $f(x_1) < f(x_2)$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[a-k;b-k]$.
On démontre de la même manière que si u est strictement décroissante sur un intervalle $[a;b]$, alors f est aussi strictement décroissante sur $[a-k;b-k]$.

2 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f définie par $f(x) = u(x+k)$, est l'image de la courbe $\mathscr{C}_u$, représentative de la fonction u, par la translation de vecteur $-k\vec{i}$



✻ DÉMONSTRATION

Soit $N(x;y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = u(x+k)$$

Donc le point $M(x+k;y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_u$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\overrightarrow{MN}(-k;0)$ d'où $\overrightarrow{MN} = -k\vec{i}$.
Par conséquent, N est l'image du point M par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

V FONCTIONS ASSOCIÉES : VALEUR ABSOLUE D'UNE FONCTION

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. La fonction $f = |u|$ est définie pour tout réel x appartenant à I par :

- $f(x) = u(x)$ lorsque $u(x) \geqslant 0$;
- $f(x) = -u(x)$ lorsque $u(x) \leqslant 0$.

VARIATIONS :

- Les fonctions $f = |u|$ et u ont les mêmes variations sur tous les intervalles où $u(x) \geqslant 0$
- Les fonctions $f = |u|$ et u ont des variations contraires sur tous les intervalles où $u(x) \leqslant 0$

EXEMPLE :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x - 8$. Le tableau de variation de la fonction u est :

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$u(x)$		0	-9	0	

Le tableau des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right|$ est :

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$f(x) = \|u(x)\|$		0	9	0	

COURBE REPRÉSENTATIVE :

- La courbe représentative $\mathscr{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est confondue avec celle de la fonction u sur tous les intervalles où $u(x) \geqslant 0$
- La courbe représentative $\mathscr{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est symétrique de la courbe de la fonction u sur tous les intervalles où $u(x) \leqslant 0$

EXEMPLE :