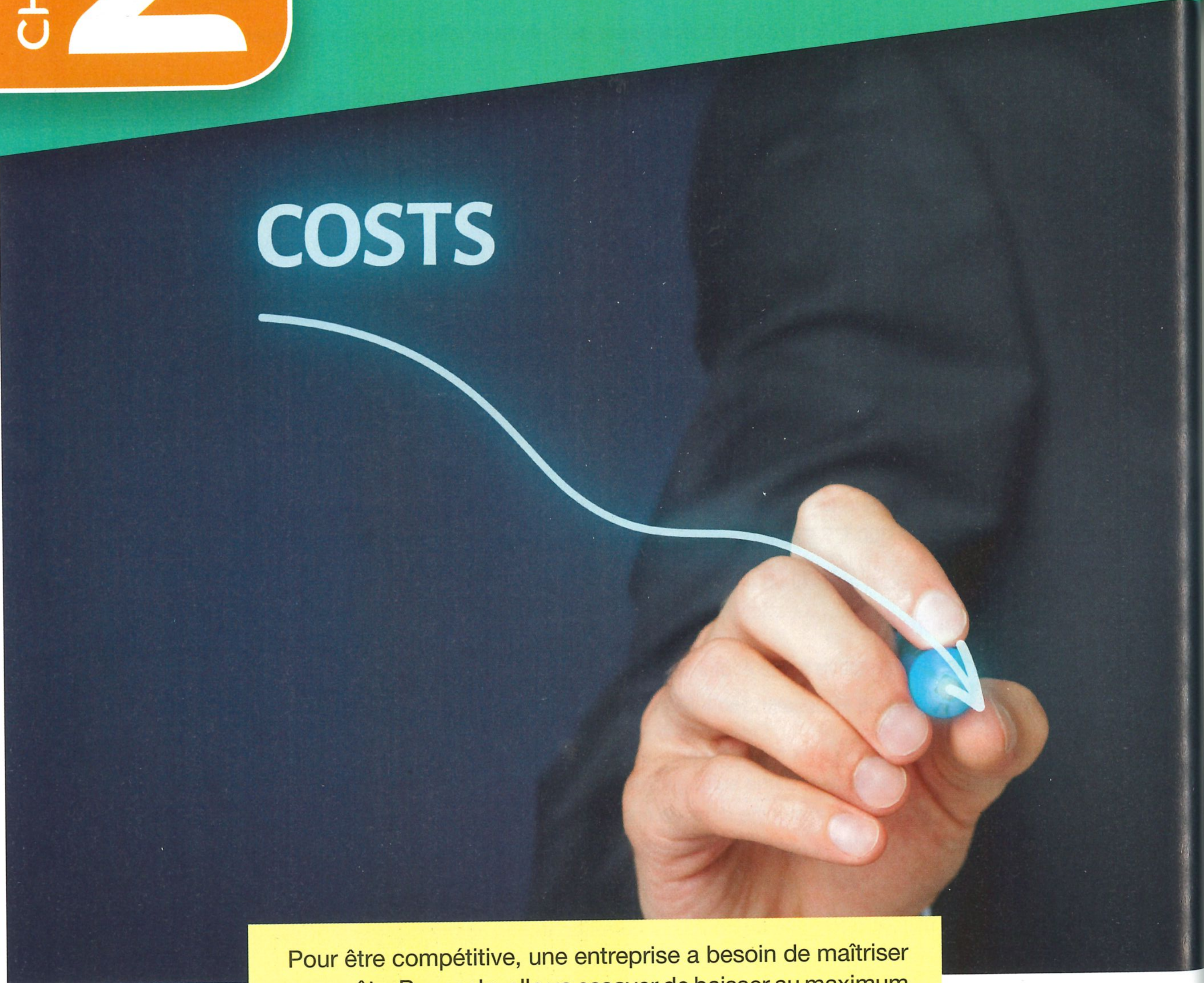
CHAPITRE 2

Fonction inverse



Pour être compétitive, une entreprise a besoin de maîtriser ses coûts. Pour cela, elle va essayer de baisser au maximum le coût de production d'un produit (coût unitaire moyen). Celui-ci se calcule à partir d'une fonction inverse.

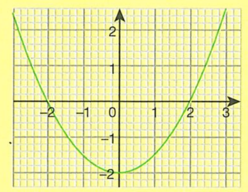
Testez vos prérequis !

Indiquer la bonne réponse.

Image et antécédent

Vrai ou faux ?

1 La fonction est donnée par sa courbe.



a. L'image de 1 est -2. ▢ V ▢ F

b. L'image de -2 est 0. ▢ V ▢ F

c. 0 est un antécédent de -2. ▢ V ▢ F

d. Les antécédents de 0 sont -2 et 2. ▢ V ▢ F

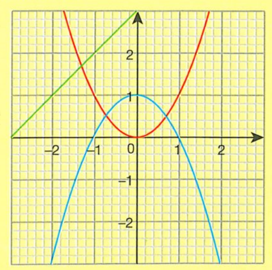
2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par la formule $f(x) = x^2 - 2$.

a. L'image de 5 est 27. ▢ V ▢ F

b. L'image de -10 est 98. ▢ V ▢ F

Variations et courbe

3 Relier chaque courbe à son tableau de variations.



Courbe verte •

Courbe rouge •

Courbe bleue •

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$	↘		↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$	↗		↘

x	$-\infty$	$+\infty$
$k(x)$	↗	

Dérivée d'une fonction polynôme

4 Vrai ou faux ?

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f' donnée est-elle bien la dérivée de f ?

a. $f(x) = x^2$ $f'(x) = 3x$ ▢ V ▢ F

b. $f(x) = x^2 + 2x$ $f'(x) = 2x$ ▢ V ▢ F

c. $f(x) = -x^2 + 3x^3$ $f'(x) = -2x + 3x^2$ ▢ V ▢ F

Dérivée et variation

5 Vrai ou Faux ?

a. Si la dérivée de la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
▢ V ▢ F

b. Si la dérivée de la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
▢ V ▢ F

c. Si la dérivée de la fonction f est négative sur $\mathbb{R}$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
▢ V ▢ F

d. Si la dérivée de la fonction f est négative sur $\mathbb{R}$ alors f est négative sur $\mathbb{R}$.
▢ V ▢ F

Corrigés p. 220

1 Découvrir le coût moyen TABLEUR

COMPÉTENCES
- Modéliser
- Calculer

Dans les entreprises, il faut distinguer deux types de coûts : les coûts fixes, ceux que l'on fait une fois pour toute, et les coûts variables qui concernent chaque élément produit.

Une entreprise pharmaceutique a investi 43 millions d'euros pour développer un médicament qui permet de retarder certains symptômes de l'ostéoporose (diminution de la densité osseuse qui affecte les personnes âgées). Chaque boîte de médicament lui coûte 12 euros à produire.
Grâce à ces données, nous avons pu faire le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Nombre d'unités produites	Coûts fixes	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût moyen
2	1	43 000 000	12	43000012	43000012
3	1000	43 000 000	12	43012000	43012
4	1000000	43 000 000	12	55000000	
5	10000000	43 000 000	12	163000000	

1 **Lire** le tableau et **trouver** quel est le coût moyen pour 1 000 unités produites.

2 **Compléter** les deux cellules qui ont été effacées, à l'aide du tableur ou de votre calculatrice.

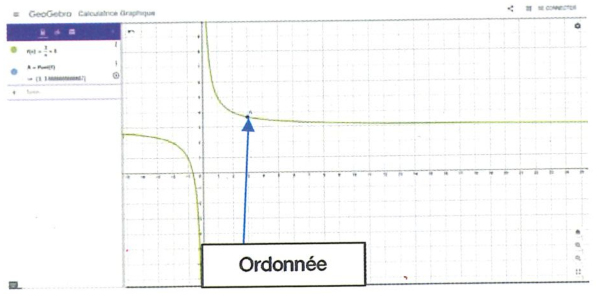
3 L'entreprise espère vendre 2 milliards de boîtes à 20 euros.
Déterminer quel serait alors son bénéfice.

2 Découvrir le comportement de la fonction inverse en $+\infty$ GEOGEBRA

COMPÉTENCES
- Représenter
- Raisonner

1 **Ouvrir** le logiciel Geogebra et, dans la fenêtre algèbre, **écrire** $f(x) = \dfrac{2}{x} + 3$

2 **Placer** un point sur la courbe représentative de la fonction, puis **faire glisser** ce point vers la droite.



3 **Observer** les ordonnées de ce point. De quelle valeur s'approchent-elles ?

4 **Faire** un travail identique avec les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = \frac{x+3}{x} \text{ et } h(x) = -1 + \frac{1}{x}.$$

3 Découvrir une droite asymptote à une courbe

COMPÉTENCE
- Raisonner

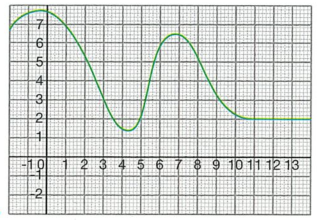
Certaines courbes deviennent parfois des quasi-droites, comme si elles se « collaient » à une droite qui n'est pas dessinée. Cette droite, on l'appelle **asymptote** à la courbe.

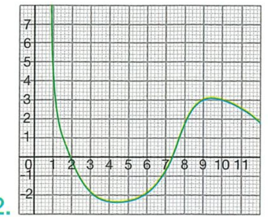
La droite rouge d'équation $y = 2$ et la droite bleue d'équation $x = 0$ sont deux droites asymptotes à la courbe.

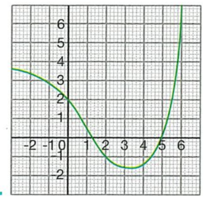
Voici quatre équations de droites :

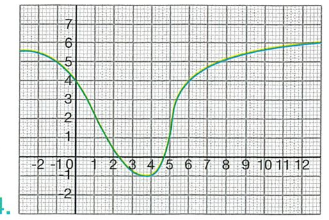
a) $y = 6$
b) $y = 2$
c) $x = 1$
d) $x = 6$

Associer chaque équation à l'une des quatre courbes suivantes.

1. 

2. 

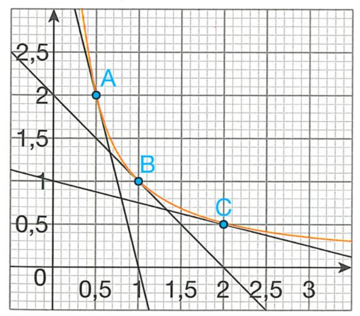
3. 

4. 

4 Déterminer le nombre dérivé de la fonction inverse

COMPÉTENCES
- Calculer
- Raisonner

Le nombre dérivé en a est défini comme étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe en a. La fonction inverse a été tracée avec Geogebra.



1 Pour chacun des points A, B et C, **donner graphiquement** le coefficient directeur de la tangente puis le nombre dérivé.

2 **Donner** tous vos résultats dans le tableau (déjà complété pour A).

Point	A	B	C
x	0,5	1	2
$f(x)$	2		
Coefficient directeur de la tangente	-4		
$f'(x)$	-4		
$-1/x^2$			

1 Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

- La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 0, son **ensemble de définition** peut donc s'écrire :

$$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$$

- Il y a donc **4 bornes** de son ensemble de définition :
  - $-\infty$;
  - 0 par valeurs négatives ;
  - 0 par valeurs positives ;
  - $+\infty$.

1 Quand x tend vers $+\infty$

Quand la valeur de x devient de plus en plus grande (elle tend vers $+\infty$), comment évolue la valeur de $\frac{1}{x}$?

x	10	20	100	1 000	2 000	…	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0005	…	0

On dit que quand x s'approche de $+\infty$, $\frac{1}{x}$ s'approche de 0.

2 Quand x tend vers $-\infty$

Quand les valeurs de x s'approchent de -∞, comment évoluent les valeurs de $\frac{1}{x}$?

x	−10	−20	−100	−1 000	−2 000	…	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	−0,1	−0,05	−0,01	−0,001	−0,0005	…	0

On dit que quand x s'approche de $-\infty$, $\frac{1}{x}$ s'approche de 0.

3 Quand x tend vers 0, par valeurs positives

Quand les valeurs de x s'approchent de 0 par valeurs positives, comment évoluent les valeurs de $\frac{1}{x}$?

x	10	1	0,1	0,01	0,001	…	0
$\frac{1}{x}$	0,1	1	10	100	1 000	…	$+\infty$

On dit que quand x s'approche de de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ s'approche de $+\infty$.

4 Quand x tend vers 0, par valeurs négatives

Quand les valeurs de x s'approchent de 0 par valeurs négatives, comment évoluent les valeurs de $\frac{1}{x}$?

x	−10	−1	−0,1	−0,01	−0,001	…	0
$\frac{1}{x}$	−0,1	−1	−10	−100	−1 000	…	$-\infty$

On dit que quand x s'approche de de 0 par valeurs négalives, $\frac{1}{x}$ s'approche de $+\infty$.

Exercice résolu A — Conjecturer le comportement aux bornes d'une fonction

La fonction f est donnée par la formule :

$$f(x)=\frac{-1}{x}+2.$$

1 Avec votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	10	100	1 000	10 000
$\frac{-1}{x}+2$	……	……	……	……

2 Que peut-on conjecturer du comportement de la fonction en $+\infty$?

3 Faire un tableau pour conjecturer le comportement de la fonction en $-\infty$.

SOLUTION

1. Tableau complété.

x	10	100	1 000	10 000
$\frac{-1}{x}+2$	1,9	1,99	1,999	1,9999

2. Conjecture sur le comportement de la fonction en $+\infty$.

On peut conjecturer que quand x s'approche de $+\infty$, $f(x)$ s'approche de 2.

3. Conjecture sur le comportement de la fonction en $-\infty$.

x	−10	−100	−1 000	−10 000
$\frac{-1}{x}+2$	2,1	2,01	2,001	2,0001

On peut conjecturer que quand x s'approche de $-\infty$, $f(x)$ s'approche de 2.

Exercices d'application 1 à 8, p. 58-59

Méthode

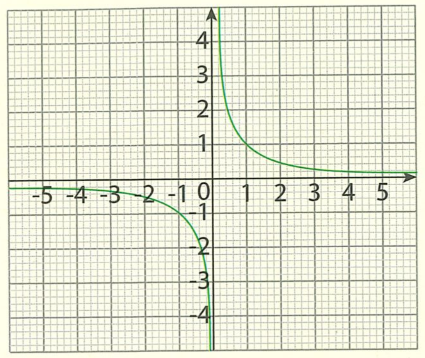
Conjecturer le comportement d'une fonction en a (a pouvant être $-\infty$ ou $+\infty$)

1. On complète ou on crée un tableau de valeurs avec la calculatrice.
2. On devine la valeur dont s'approche $f(x)$ lorsque x s'approche de a.
3. On écrit la phrase bilan : quand x s'approche de a, $f(x)$ s'approche de…

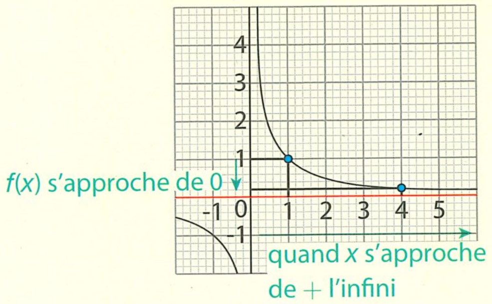
2 Asymptotes et courbe de la fonction inverse

1 La courbe représentative de la fonction inverse

Voici la courbe de la fonction inverse, représentée ici en vert.



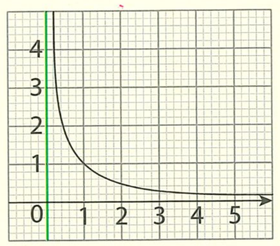
2 Étude de la courbe en $+\infty$



- La courbe représentative de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ est donnée ci-contre.
- Une droite est tracée en rouge : elle illustre le fait que la courbe de la fonction inverse est **une quasi-droite en** $+\infty$.
- Cette droite est l'**asymptote** à la courbe en $+\infty$. Son équation est $y=0$.
- Cela signifie que quand x s'approche de $+\infty$, la fonction inverse s'approche de 0.

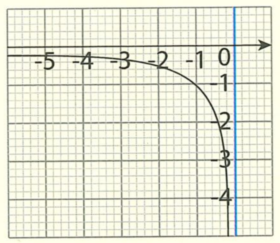
- Il existe trois autres parties de la courbe de la fonction inverse qui sont des quasi-droites : trois autres droites sont ainsi appelées **asymptotes** à la courbe.

3 Étude en 0 par valeurs positives



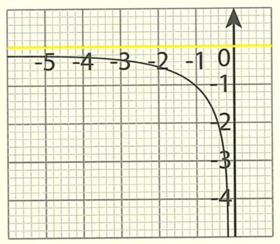
Quand x s'approche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ s'approche de $+\infty$. La droite verticale d'équation $x=0$ (ici, en vert) est asymptote à la courbe.

4 Étude en 0 par valeurs négatives



Quand x s'approche de 0 par valeurs négatives, $f(x)$ s'approche de $-\infty$. La droite verticale d'équation $x=0$ (ici, en bleu) est asymptote à la courbe.

5 Étude en $-\infty$



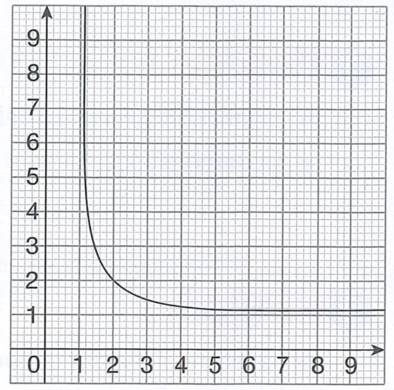
Quand x s'approche de $-\infty$, $f(x)$ s'approche de 0. La droite horizontale d'équation $y=0$ (ici, en jaune) est asymptote à la courbe.

Exercice résolu B — Dessiner une asymptote et donner son équation

La courbe de la fonction f est donnée ci-contre.

Graphiquement, tracer les deux droites asymptotes à la courbe.

Donner leurs équations.



SOLUTION

La droite horizontale (ici représentée en rouge) est asymptote en $+\infty$ à la courbe.

Son équation est $y=1$.

La droite verticale (ici représentée en bleu) est asymptote à la courbe en 1 pour les valeurs supérieures à 1.

Son équation est $x=1$.

Méthode

Tracer une asymptote et donner son équation

1. On identifie une partie où la courbe est une quasi-droite.
2. On ajuste avec sa règle et on trace la droite.
3. On cherche l'équation de la droite.

Exercices d'application 9 à 12, p. 59-60

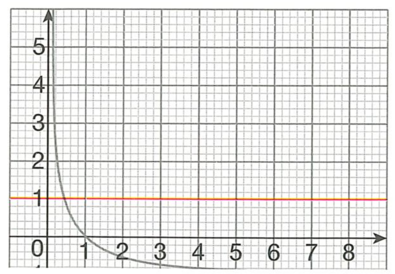
Exercice résolu C — Identifier graphiquement une droite comme étant une asymptote

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-1+\dfrac{1}{x}$.

À l'aide de votre calculatrice graphique (ou du logiciel Geogebra) répondez à la question suivante : la droite d'équation $y=1$ est-elle asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$?

SOLUTION

À l'aide de la représentation graphique, on peut conjecturer que la droite d'équation $y=1$ n'est pas asymptote. Ce serait plutôt la droite d'équation $y=-1$ qui serait asymptote horizontale.



Méthode

Identifier graphiquement une asymptote

1. Sur un même graphique, on représente la courbe et la droite.
2. Si la courbe vient se « coller » à la droite, on conclut qu'elle est sans doute asymptote.

Exercices d'application 22 à 24, p. 61-62

3 Dérivée de la fonction inverse

1 Dérivée

- La fonction inverse est définie sur deux intervalles, $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.
- **Sa dérivée** est définie sur le même ensemble, et elle vaut :

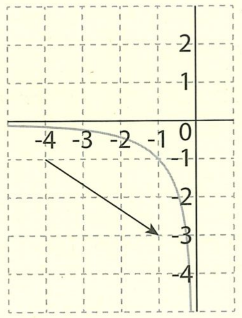
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2 Variations

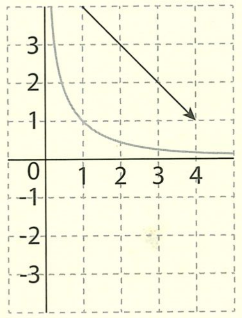
- La fonction x^2 étant toujours strictement positive quel que soit le signe de x, la dérivée de la fonction inverse est donc toujours strictement négative.
- Dit autrement $\frac{1}{x^2}$ est strictement positive donc $-\frac{1}{x^2}$ est strictement négative.

Remarque
La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$,
car $-3 < 2$ mais $\frac{1}{-3} < \frac{1}{2}$

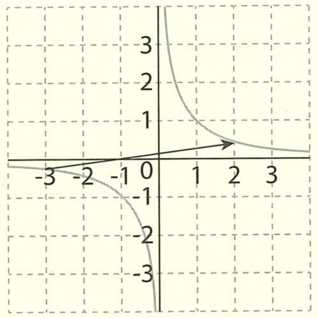
- Or, on sait depuis la classe de première que si une fonction a sa dérivée négative sur un intervalle, alors la fonction inverse est décroissante sur cet intervalle.
Ainsi la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et elle est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.



La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$



La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$



Mais la fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple
La dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\frac{3}{x}$ peut se calculer de la manière suivante :
On sait que la dérivée de $kf(x)$ est $kf'(x)$,
or $g(x) = -\frac{3}{x} = -3 \times \frac{1}{x}$ $(k = -3)$.

Ainsi $g'(x) = -3 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$.

Pour toute valeur de x, $g'(x)$ est positive.
Sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$, la dérivée est positive, donc la fonction g est croissante.
Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la dérivée est positive, donc la fonction g est croissante.
Mais la fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice résolu D — Calculer la dérivée et étudier son signe

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est donnée par la formule $f(x) = \frac{-1}{x} + 2x$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f(x) = \frac{1 + 2x^2}{x^2}$.
3. Étudier le signe de la dérivée.
4. Donner le tableau des variations de la fonction f sur son intervalle de définition.

SOLUTION

1. Dérivée de la fonction f

$f(x) = -\frac{1}{x} + 2x$.

On calcule séparément chacun des termes.

$\left(-\frac{1}{x}\right)' = -1 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -1 \times -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

$(2x)' = 2$

Or on sait que $(u + v)' = u' + v'$.

Ainsi, $f'(x) = \frac{1}{x^2} + 2$.

2. Autre écriture

On met tout sur le même dénominateur :

$f'(x) = \frac{1}{x^2} + 2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1 + 2x^2}{x^2}$

3. Signe de la dérivée

Le dénominateur est positif. Le numérateur est la somme de deux nombres positifs, il est positif aussi.
Ainsi, le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $f'(x)$ est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4. Tableau de variations

La fonction est positive sur $]-\infty ; 0[$, donc elle est croissante sur $]-\infty ; 0[$.
La fonction est positive sur $]0 ; +\infty[$, donc elle est croissante sur$]0 ; +\infty[$.
Ainsi le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

Méthode
Calculer la dérivée d'une combinaison de la fonction inverse et d'un polynôme

1. On identifie chacun des termes de la somme : $u + v + w + \ldots$
2. On calcule séparément chacune des dérivées avec les formules que l'on connaît :
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(x^n)' = nx^{n-1}$.
3. On additionne les dérivées obtenues.

Exercices d'application 33 à 35, p. 63-64

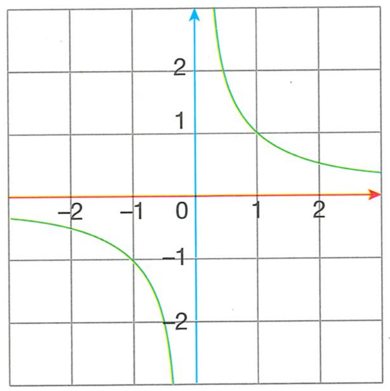
Fonction inverse

Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

- La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 0,
son ensemble de définition peut donc s'écrire $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
- Il y a donc 4 bornes de son ensemble de définition : $-\infty$; 0 par valeurs négatives, O par valeurs positives et $+\infty$.
- Quand x s'approche de $+\infty$, $\frac{1}{x}$ s'approche de 0.
- Quand x s'approche de $-\infty$, $\frac{1}{x}$ s'approche de 0.
- Quand x s'approche de de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ s'approche de $+\infty$.
- Quand x s'approche de de 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ s'approche de $+\infty$.

Asymptotes et courbe de la fonction inverse

- La courbe représentative de la fonction inverse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (en rouge).
- La courbe représentative de la fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (en bleu).



Dérivée de la fonction inverse

- La fonction inverse est définie sur deux intervalles, $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
Sa dérivée est définie sur le même ensemble, et elle vaut :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- La dérivée de la fonction inverse est toujours strictement négative.
- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et elle est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Testez vos connaissances !

Indiquer la bonne réponse.

	A	B	C
1 La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{x} - 5$			
a. Quand x s'approche de $+\infty$, $f(x)$ s'approche de	$+\infty$	$-\infty$	-5
b. Quand x s'approche de $-\infty$, $f(x)$ s'approche de	$+\infty$	$-\infty$	-5
c. Quand x s'approche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ s'approche de	$+\infty$	$-\infty$	-5
2 Indiquer la fonction dérivée f' de la fonction f			
a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$	$f'(x) = 3x + 2$	$f'(x) = 3x^2 + 2$	$f'(x) = 3x^2 + 4x$
b. $f(x) = -\frac{2}{x}$	$f'(x) = \frac{2}{x^2}$	$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = \frac{2}{x}$
c. $f(x) = \frac{4}{x} - x$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 1$	$f'(x) = \frac{4 - x^2}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{4}{x^2} - x$
3 Indiquer le signe de la dérivée en 3.			
a. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$	> 0	< 0	0
b. $f'(x) = \frac{-12}{x^2}$	> 0	< 0	0
c. $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$	> 0	< 0	0
4 On sait que la dérivée de la fonction f est…			
a. … négative sur $[3\,;+\infty[$, alors…	La fonction est croissante sur $]-\infty\,;3]$	La fonction est décroissante sur $]-\infty\,;3]$	La fonction est décroissante sur $[3\,;+\infty[$
b. … positive sur $[3\,;+\infty[$, alors…	La fonction est croissante sur $]-\infty\,;-2]$	La fonction est constante sur $[3\,;+\infty[$	La fonction est croissante sur $[3\,;+\infty[$

Corrigés p. 220

1 Un peu de thermodynamique... PYTHON

SITUATION La loi des gaz parfaits, établie en 1834 par Émile Clapeyron, est une relation reliant pression et volume d'un gaz dit « parfait ».
Il s'agit de l'égalité : $pV = nRT$, où p est la pression (en pascals Pa), V le volume (en m³), n la quantité de matière (en moles), R la constante universelle des gaz parfaits (et qui vaut environ 8,314 joules par kelvin par mole) et T la température (en kelvins K).

⇨ **On s'intéresse dans ces travaux pratiques à cette relation.**

Réalisation d'un programme Python — 30 min

On se place à une température constante de 300 K et on considère une quantité de matière d'un gaz parfait constante de 5×10^{-3} moles.

1 Réaliser une fonction Python qui retourne la pression pour un certain volume V variable.

2 On a programmé la fonction suivante :

```
def gaz():
    for i in range (1,11) :
            p=0.005*8.314*300/i
            print(i,':',p)
```

Que fait-elle ?

3 Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne les valeurs de la pression jusqu'à ce que cette dernière soit inférieure à 1 pascal en l'évaluant pour des volumes commençant à 1 m³, par pas de 1 m³.

```
def gaz2():
    V=1
    p=0.005*8.314*300/V
    ... ... :
            p=0.005*8.314*300/V
            print(V,':',p)
            V+=1
```

La programmer.
Que peut-on en conclure ?

Pour aller plus loin

Étude théorique

On se place à nouveau à une température constante de 300 K et on considère une quantité de matière d'un gaz parfait constante de 5×10^{-3} moles.

On appelle p la fonction qui, à un volume V exprimé en m³ de ce gaz parfait, associe sa pression $p(V)$.

4 Déterminer l'expression de $p(V)$.

5 Tracer la courbe représentative de la fonction p.
On pourra programmer la fonction de la question 2 pour obtenir quelques points.

6 Lire graphiquement le résultat de la question 3.

7 Retrouver ce résultat par le calcul.

2 Coût unitaire TABLEUR

SITUATION Dans une entreprise, il est intéressant de connaître le coût par unité produite. Dans la PME de Jeanne, on fabrique des jouets en bois. Jeanne veut mettre sur le marché un nouveau jeu de quilles. Elle s'intéresse au coût unitaire. En effet, le coût par jeu produit ne sera pas le même si elle en produit 100 ou 10 000.
Elle estime qu'elle peut vendre ce produit environ 30 € quand elle regarde les prix pratiqués par ses concurrents. Elle se pose alors la question suivante :

⇨ **Combien de jeux dois-je produire pour faire une marge de 100 %** (c'est-à-dire que les recettes soient égales au double des coûts de production) ?

Étude à l'aide d'un tableur — 25 min

Il distingue deux types de coûts, ceux qu'il faut faire une fois pour toute (coûts fixes) et ceux qui sont liés à la production de chaque nouveau jeu (coûts variables).

Parmi les coûts fixes, il a fait la liste suivante :
- Conception du jeu et de la boite : 5000 euros
- Création de la chaine de production : 8000 euros
- Publicité : 12 000 euros

Parmi les coûts variables, il fait la liste suivante :
- Bois : 0,90 euros
- Amortissement de la machine : 2,50 euros
- Impression du numéro sur la quille : 0,20 euros.

Il commence à créer la feuille de calcul suivante pour enregistrer ces informations.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nombre d'unités produites	Conception	Création de la chaine de productin	Publicité	total des coûts fixes	Bois	Amortissement	Impression	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1	5000	8000	12000		0,90	2,50	0,20			
3	2										
4	1000										
5	10000										
6	100000										

1 Compléter la feuille avec les formules adéquates, pour que la première ligne soit complète.
Vérifiez que vous trouvez bien un coût unitaire égal à 25 003,6 euros.

2 Compléter alors le reste de tableau. Dans quel intervalle est la valeur qui permet de dégager une marge de 100 % ? Dans l'intervalle [1000 ;10000] ou dans l'intervalle [10000 ;100 000] ?

3 Avec le tableur, trouver alors cette valeur par tâtonnement.

Pour aller plus loin

Calculs théoriques

4 Montrer que le coût total pour x unités produites est donné par la formule $f(x) = 25\,000 + 3{,}6x$.

5 Montrer que le coût unitaire est donné par la formule $g(x) = \dfrac{25\,000}{x} + 3{,}6$.

6 Avec la calculatrice, retrouver la valeur qui permet de dégager une marge de 100 %.

Travailler les automatismes du chapitre

Pour travailler les automatismes : PowerPoint Questions flash liennathan.fr/fu4k46

1 Si la dérivée de f est positive sur l'intervalle $[2 ; 3]$, alors on peut dire que la fonction f est…

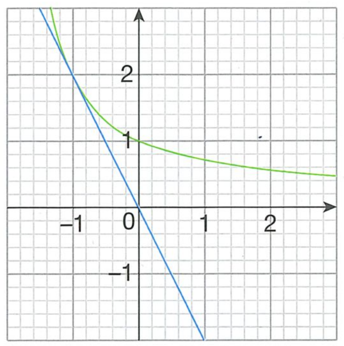
2 L'inverse de $\frac{1}{4}$ est…

3 L'image de -3 par la fonction f définie par $f(x) = -3 + \frac{6}{x}$ est…

4 Que peut-on dire des variations de la fonction inverse sur son ensemble de définition ?

5 Un antécédent de 3 par la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x} + 1$ est…

6 La courbe verte est la courbe représentative d'une fonction f.

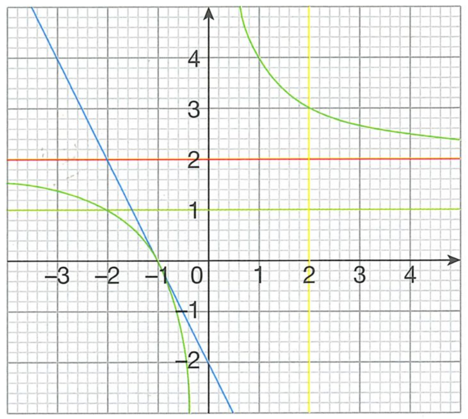


a. L'image de -1 est…
b. Le coefficient directeur de la tangente en -1 est…
c. Le nombre dérivé en -1 est…

7 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$.

a. Quand x s'approche de $+\infty$, alors $f(x)$ s'approche de…
b. Quand x s'approche de $-\infty$, alors $f(x)$ s'approche de…
c. Quand x s'approche de 0 par valeurs positives, alors $f(x)$ s'approche de…

8 Une courbe représentative est donnée en vert. On a aussi représenté 4 droites sur le graphique. Parmi ces 4 droites, le nombre de droites qui sont des asymptotes à la courbe est…



9 La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 3x$ est donnée par la formule…

10 Si $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$ alors le nombre dérivé en 1 est…

11 Si $f'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ alors le coefficient directeur de la tangente en -1 est…

Travailler les automatismes du BAC

Proportion et pourcentage

1 Calculer $\frac{1}{5}$ de la moitié sous forme de pourcentage.

2 a) Que vaut 12 quand il a augmenté de 25 % ?

Valeur	12	
Indice	100	150

b) Calculer la valeur manquante.

3 Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 100 % puis a diminué de 50 % ?

4 Le taux d'évolution nécessaire à compenser une hausse de 25 % est…
a) −20 % b) −25 % c) −50 %

5 La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.
Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018. À partir de cette date, chaque mois, elle dépense un quart du contenu de sa tirelire.

6 Calculer sous forme de fraction irréductible $\dfrac{9}{\frac{3}{4}}$.

7 Écrire sous la forme 2^k le nombre $D = \frac{8}{2^6} \times 4^5$.

8 Donner l'écriture fractionnaire et scientifique de 0,000 006.

9 Convertir 4,2 heures en heure minute.

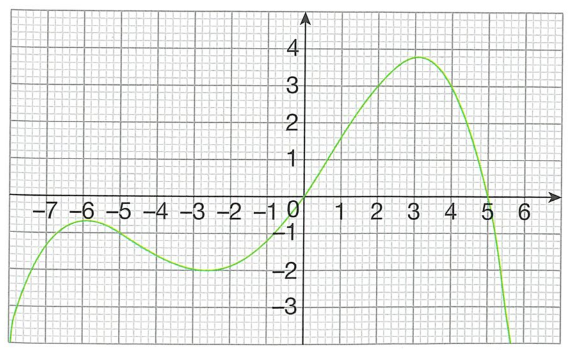
10 Construire le tableau de signes de $(1 - x)(4x + 2)$ sur $\mathbb{R}$.

11 Le prix au m² d'un appartement est donné par la formule : prix au m² $= \dfrac{\text{prix}}{\text{surface (en m}^2)}$.
Un appartement de 35 m² coûte 140 000 €. Quel est le prix au m² de cet appartement ?

12 Développer et réduire $D = 7(x - 1)^2$.

13 Dériver $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a) Quelle est l'image de 5 par f ?
b) Quels sont les antécédents de 3 par f ?
c) Donner le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$

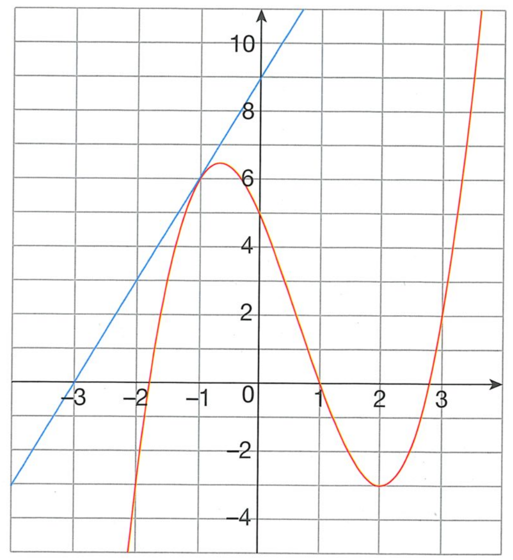
15 Construire le tableau de signes de $-\frac{1}{3}(x + 6)(x - 10)$.

16 Construire le tableau de signes de g.

17 Déterminer le point de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x+2}$ qui appartient à l'axe des ordonnées.

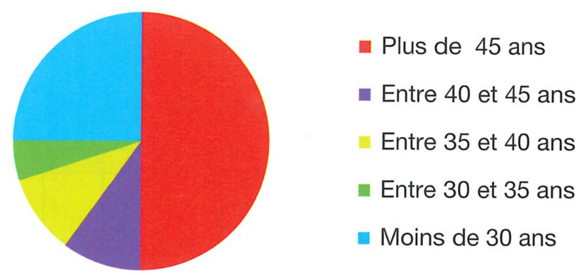
18 On considère les points $A(-11 ; 3)$ et $B(5 ; 3)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

19 On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer graphiquement $f'(-1)$.



Données chiffrées

20 On a représenté la série statistique donnant la répartition des 300 salariés d'une entreprise selon leur âge. Combien de salariés ont moins de 30 ans ?



Applications directes

Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

1 En $+\infty$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Avec la calculatrice, compléter les tableaux suivants, puis compléter les phrases.

a.

x	10	20	100	1 000	2 000	…	$+\infty$
$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :

quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ s'approche de …

b.

$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :

quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ s'approche de …

c.

$f(x) = -3 + \frac{4}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :

quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ s'approche de …

2 En $-\infty$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Avec la calculatrice, compléter les tableaux suivants, puis compléter les phrases.

a.

x	-10	-20	-100	$-1\,000$	$-2\,000$	…	$-\infty$
$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ s'approche de …

b.

$f(x) = -2 - \frac{1}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ s'approche de …

c.

$f(x) = -3 + \frac{4}{x}$						…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ s'approche de …

3 En 0 par valeurs positives

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Avec la calculatrice, compléter les tableaux suivants, puis compléter les phrases.

a.

x	1	0,1	0,01	…	0
$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs positives,
$f(x)$ s'approche de…

b.

$f(x) = -1 - \frac{1}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs positives,
$f(x)$ s'approche de…

c.

$f(x) = 3 - \frac{1}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs positives,
$f(x)$ s'approche de …

4 En 0 par valeurs négatives

La fonction f est définie $\mathbb{R}^*$. Avec la calculatrice, compléter les tableaux suivants, puis compléter les phrases.

a.

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	…	0
$f(x) = 6 + \frac{1}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs négatives,
$f(x)$ s'approche de …

b.

$f(x) = -2 - \frac{2}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs négatives,
$f(x)$ s'approche de …

c.

$f(x) = 1{,}3 - \frac{1}{x}$				…	

On peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de 0 par valeurs négatives,
$f(x)$ s'approche de …

5 La fonction f est définie par $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$.

Compléter le tableau avec la calculatrice, puis la phrase.

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	…	0
$f(x)$					…	

Au vu des valeurs du tableau, on peut faire la conjecture suivante : quand x s'approche de 0 par valeurs négatives, $f(x)$ s'approche de…

6 Oral Compléter les phrases suivantes.

a. On sait que $\frac{1}{x}$ s'approche de 0 quand x tend vers $+\infty$, donc $3 + \frac{1}{x}$ s'approche de ……… quand x tend vers $+\infty$.

b. On sait que $\frac{1}{x}$ s'approche de 0 quand x tend vers $-\infty$, donc $2 - \frac{1}{x}$ s'approche de ……… quand x tend vers $-\infty$.

c. On sait que $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x s'approche de 0 par valeurs positives, donc $3 + \frac{1}{x}$ s'approche de ……… quand x s'approche de 0 par valeurs positives.

d. On sait que $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x s'approche de 0 par valeurs négatives, donc $3 - \frac{1}{x}$ s'approche de ……… quand x s'approche de 0 par valeurs négatives.

7 TABLEUR Trois fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ sont données par les formules suivantes :

$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $g(x) = 3 - \frac{4}{x}$; $h(x) = \frac{1}{x} - 1$.

	A	B	C	D
1		Valeurs de x		
2	Fonction	10	100	1000
3	f(x)=2-1/x	1,9	1,99	1,999
4	g(x)=3-4/x			
5	h(x)=1/x-1			
6				

a. Quelle formule a été entrée dans la cellule B3 pour obtenir le résultat 1,9 ?

b. Quelle est la valeur dont s'approche la fonction quand x s'approche de $+\infty$?

c. Ouvrir votre tableur et faire le même travail avec les fonctions g et h.

8 TABLEUR La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = k - \frac{1}{x}$

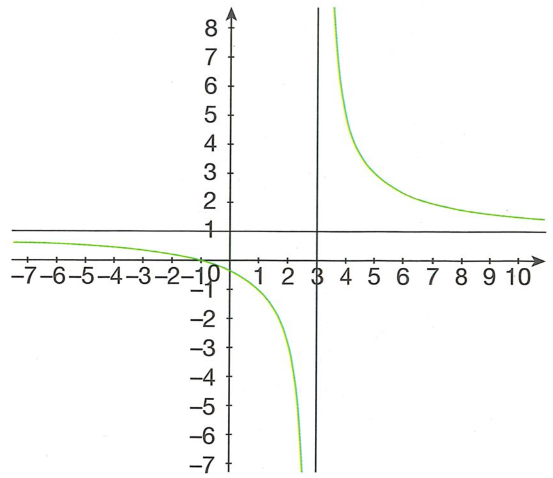
	A	B	C	D	E
1			Valeurs de x		
2	Fonction	k	10	100	1000
3	f(x)=k-1/x	2	1,9	1,99	1,999
4	f(x)=k-1/x	3	2,9	2,99	2,999
5	f(x)=k-1/x	-1	-1,1	-1,01	-1,001

a. Une formule a été entrée dans la cellule C3 puis étirée vers la droite et vers le bas. Parmi les quatre formules suivantes, laquelle a été placée : =B2-1/C2 ; =B$2-1/C$2 ; =$B2-1/C$2 ; =B$2-1/C2 ?

b. Pour chacune des valeurs de k, donner la valeur dont s'approche $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

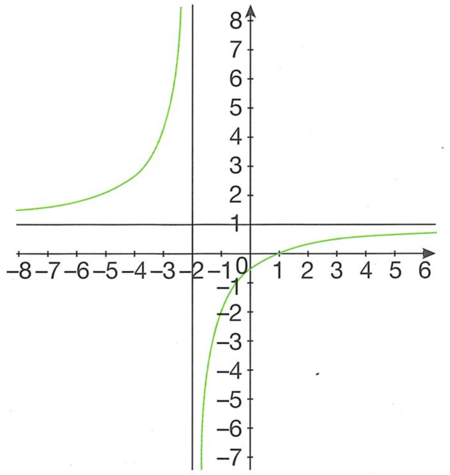
Asymptotes

9 Voici la courbe représentative d'une fonction et plusieurs phrases concernant les asymptotes. Indiquer les phrases qui sont vraies pour cette courbe.



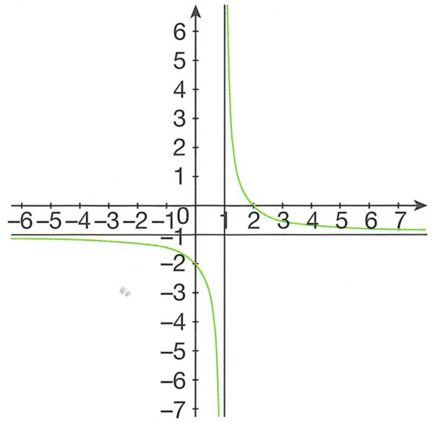
☐ **a.** La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe.
☐ **b.** La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe.
☐ **c.** La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe.
☐ **d.** La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.

10 Voici la courbe représentative d'une fonction et plusieurs phrases concernant les asymptotes. Indiquer les phrases qui sont vraies pour cette courbe.



☐ **a.** La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe.
☐ **b.** La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.
☐ **c.** La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe.
☐ **d.** La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la courbe.

11 Voici la courbe représentative d'une fonction et plusieurs phrases concernant les asymptotes. Indiquer les phrases qui sont vraies pour cette courbe.



☐ **a.** La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.
☐ **b.** La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe.
☐ **c.** La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe.
☐ **d.** La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe.

12 Compléter les phrases ci-dessous et illustrer par une courbe tracée à main levée.

a. Si, quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ s'approche de 0, alors on peut dire que la droite d'équation __________ est asymptote à la courbe.

b. Si, quand x tend vers $-\infty$, alors $f(x)$ s'approche de 3, alors on peut dire que la droite d'équation __________ est asymptote à la courbe.

c. Si, quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ s'approche de -2, alors on peut dire que la droite d'équation __________ est asymptote à la courbe.

d. Si, quand x s'approche de 3 par valeurs inférieures alors $f(x)$ tend vers $+\infty$, alors on peut dire que la droite d'équation __________ est asymptote à la courbe.

e. Si, quand x s'approche de -1 par valeurs inférieures alors $f(x)$ tend vers $-\infty$, alors on peut dire que la droite d'équation __________ est asymptote à la courbe.

13 Tracer à main levée une courbe qui a les 3 propriétés suivantes.

Propriété 1 : L'image de 3 est 2.

Propriété 2 : La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Propriété 3 : La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

14 Tracer à main levée une courbe qui a les 3 propriétés suivantes.

Propriété 1 : L'image de 1 est 2.

Propriété 2 : La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$

Propriété 3 : La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

15 Tracer une courbe qui a les 4 propriétés suivantes.

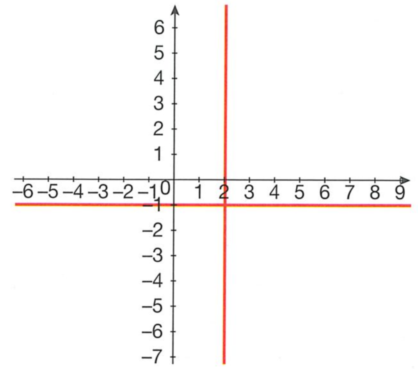
Propriété 1 : La courbe est croissante sur $]-\infty\,;-1[$.

Propriété 2 : La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

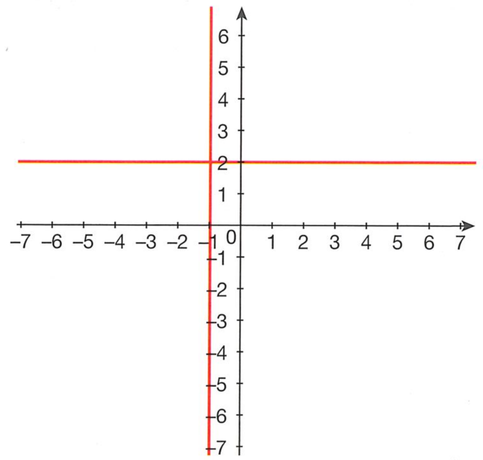
Propriété 3 : La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Propriété 4 : La courbe est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

16 Reproduire le graphique suivant puis tracer la courbe d'une fonction qui est décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et décroissante sur $]2\,;+\infty[$. De plus, les deux droites représentées doivent être asymptotes à la courbe.



17 Reproduire le graphique suivant puis tracer la courbe d'une fonction qui est croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]-1\,;+\infty[$. De plus, les deux droites représentées doivent être asymptotes à la courbe.



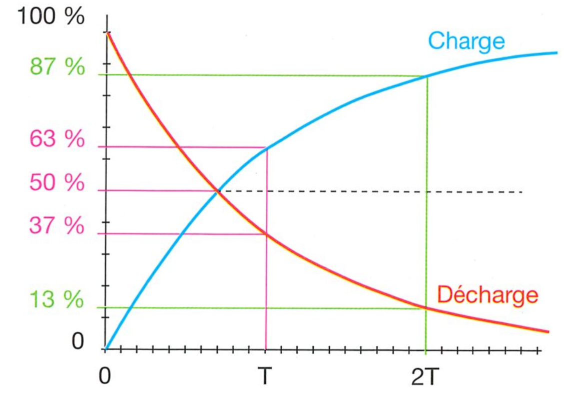
18 **a.** Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ donnée par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$.
b. Donner les équations des différentes asymptotes.

19 **a.** Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.
b. Donner les équations des différentes asymptotes.

20 **a.** Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction f donnée par $f(x) = -2 + \dfrac{1}{x-1}$.
b. Donner les équations des différentes asymptotes.

21 **a.** Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{1}{x-1{,}5}$.
b. Donner les équations des différentes asymptotes.

22 **STI2D** Voici deux courbes qui décrivent la charge et la décharge d'un condensateur en fonction du temps.

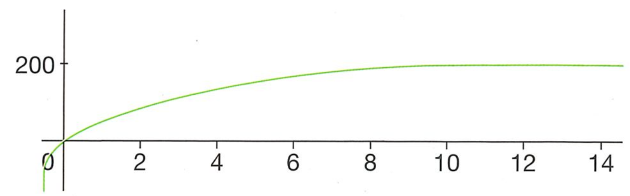


L'axe des abscisses décrit le temps.

a. Quelle est l'équation de l'asymptote en $+\infty$ pour la courbe bleue qui correspond à la charge d'un condensateur ?

b. Quelle est l'équation de l'asymptote en $+\infty$ pour la courbe rouge qui correspond à la décharge d'un condensateur ?

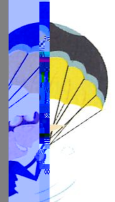
23 Lors d'un saut en parachute, le parachutiste a d'abord une vitesse qui augmente, puis elle se stabilise. Voici représentée, ci-dessous, l'évolution de la vitesse du parachutiste en fonction du temps. L'axe des abscisses est gradué en secondes et l'axe des ordonnées en centaines de kilomètres par heure.



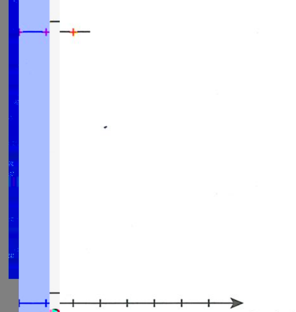
a. Peut-on dire que la droite d'équation $y = 200$ est asymptote à la courbe ?

b. Le site « Abeille parachutisme » affirme que :
« Dès la sortie de l'avion et au début du saut, la vitesse de chute augmente très rapidement.

ss
res sive, les 300 premiers
en moins de 10 secondes
se stabilise aux
it à près de 200 km/h. ».
lle cohérente avec la courbe
?



enant de l'eau est chauffée
être est présent dans la
mpérature est fait toutes les
ui est obtenue.



cou be admet

uation de cette asymptote.
ant es, quelle est celle
évolution de la température

r $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.
peut s'écrire sous la forme
ne constante.

26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{4x}$.

a. Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \times \frac{1}{x}$ où k est une constante.

b. Calculez alors $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

27 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{-1}{3x}$.

a. Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \times \frac{1}{x}$ où k est une constante.

b. Calculer alors $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

28 **Calculer une dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$.

a. La fonction f est définie par $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$.

b. La fonction g est définie par $g(x) = x - \frac{1}{x}$.

c. La fonction h est définie par $h(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{x}$

d. La fonction k est définie par $k(x) = -3x - \frac{2}{x}$

29 **Transformer l'expression d'une dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes, puis montrer que la fonction dérivée peut s'écrire de la manière proposée.

a. La fonction f est définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

b. La fonction g est définie par $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$

c. La fonction h est définie par $h(x) = 2 + x + \frac{2}{x}$

Montrer que $h'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$.

d. La fonction k est définie par $k(x) = \frac{10}{x} + 10x$.

Montrer que $f'(x) = 10 \times \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$.

30 **Étudier le signe d'une expression.** Compléter le tableau suivant à la manière de l'exemple.

Expression	Intervalle d'étude	Signe du numérateur	Signe du dénominateur	Signe de l'expression sur l'intervalle
$\frac{x+3}{x}$	[2 ; 3]	Positif	Positif	Positif

Expression	Intervalle d'étude	Signe du numérateur	Signe du dénominateur	Signe de l'expression sur l'intervalle
$\frac{x+3}{x}$	[−1 ; 0[	Positif		
$\frac{x-3}{x^2}$	[1 ; 2]			
$\frac{x+3}{-x^2}$	[−2 ; −1]			
$\frac{1-x}{x^2}$	[2 ; 3]			

31 **Relier le signe de la dérivée avec les variations de la fonction.**

Compléter les tableaux de variations suivants.

a.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					

b.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$					

c.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$h'(x)$			‖		
$h(x)$		↘	‖	↘	

d.

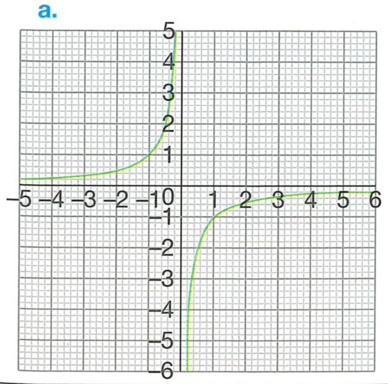
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$			‖	$-$	
$k(x)$		↘	‖		

32 **Relier le signe de la dérivée avec les variations observées sur une courbe.**

Compléter le tableau de variations à partir des variations observées de la courbe.

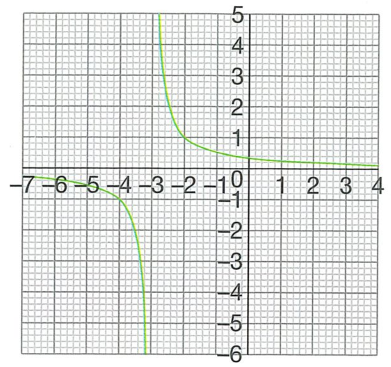
Courbes	Tableaux de variations

a.



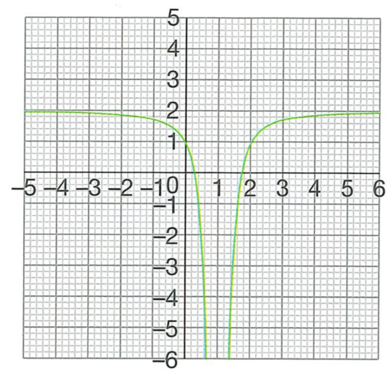
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$		‖	

b.



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$k(x)$		‖	

c.



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$k(x)$		‖	

33 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la formule $f(x) = \frac{1}{x} + 5x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f'(x) = \frac{2 + 5x^2}{x^2}$.

c. Étudier le signe de la dérivée.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

34 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la formule $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f'(x) = \frac{-1 + x^2}{x^2}$.

c. Montrer que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
Étudier alors le signe de la dérivée.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

35 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la formule $f(x) = \dfrac{4}{x} + x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

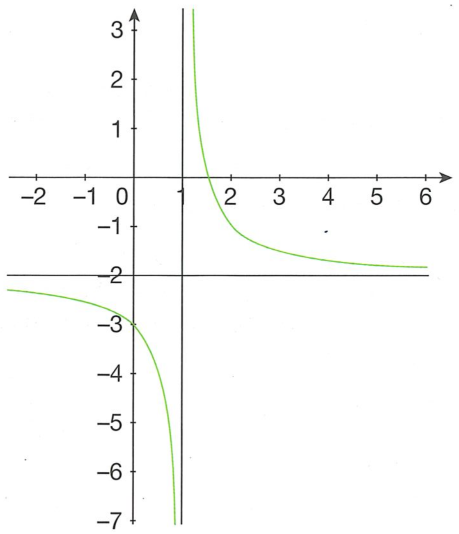
c. Étudier le signe de la dérivée.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

Entraînement

36 Voici un extrait d'une courbe représentative.

Compléter les phrases par lecture graphique.



a. L'image de 2 est égal à .....

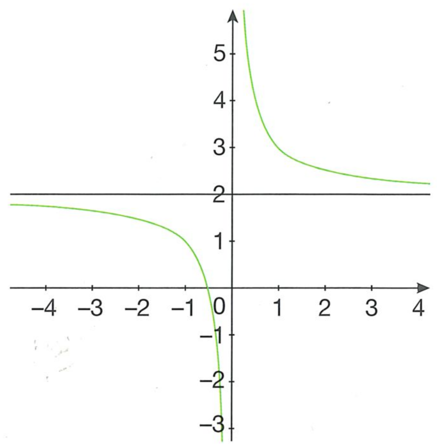
b. L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est .....

c. L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est ....

d. La courbe d'équation ..... est asymptote horizontale à la courbe.

37 Voici un extrait d'une courbe représentative.

Compléter les phrases par lecture graphique.



a. L'image de -1 est égal à ....

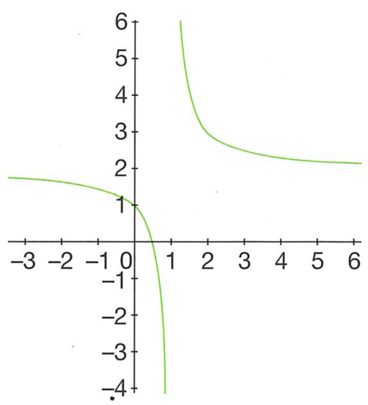
b. $f'(1) =$ ....

c. La fonction est décroissante sur l'intervalle .... et sur l'intervalle ....

d. La courbe d'équation .... est asymptote horizontale à la courbe.

38 Voici un extrait d'une courbe représentative.

Compléter les phrases par lecture graphique.



a. L'image de 2 est égal à ....

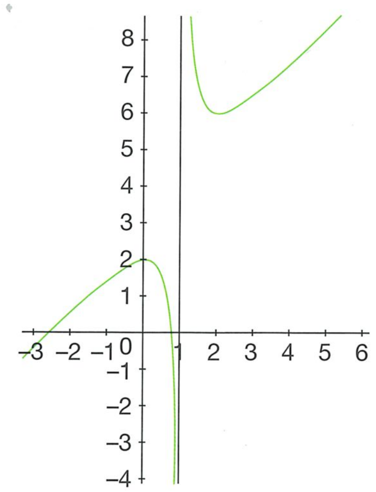
b. On peut conjecturer que la droite d'équation .... est une asymptote horizontale à la courbe.

c. L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est ....

d. La dérivée $f'(x)$ est positive sur l'ensemble ....

39 Voici un extrait d'une courbe représentative.

Compléter les phrases par lecture graphique.



a. L'image de 2 est égal à .....

b. L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est ....

c. L'ensemble des solutions de $f(x) < 0$ est ....

d. La courbe d'équation ..... est asymptote verticale à la courbe.

40 La relation entre énergie, puissance et temps est $E = P \times t$, où P est la puissance délivrée pendant un temps t (E est donné est watts x heure, P est donnée en watts, et la durée t est donnée en heure). Pour un cycliste, il faut une certaine énergie pour gravir un col. Supposons que cette énergie soit connue : environ 100 watts $\times$ heures.

a. Exprimer le temps d'ascension, en fonction de la puissance délivrée, P ; on note cette fonction $t(P)$.

b. Représenter la fonction t dans un repère orthogonal.

c. Quelle est la durée d'ascension d'un cycliste professionnel capable de produire une puissance de 400 watt ?

Approfondissement

41 La valeur cachée

Calculer – Raisonner

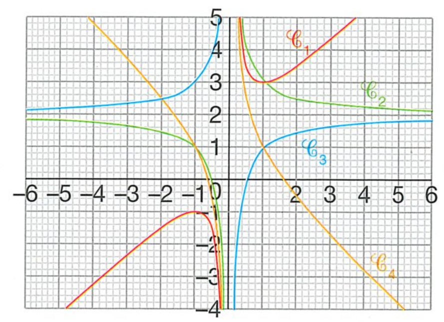
Pour chacune des fonctions données, une valeur a été effacée. Essayer de retrouver la valeur manquante en utilisant l'information qui est donnée.

La fonction f est donnée par la formule...	Information
a. $f(x) = \blacksquare + \dfrac{1}{x}$	$f(1) = 4$
b. $f(x) = 2 + \dfrac{\blacksquare}{x}$	$f'(1) = -2$
c. $f(x) = \blacksquare - \dfrac{2}{x}$	La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.
d. $f(x) = \blacksquare - \dfrac{1}{x}$	La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

42 À chaque fonction sa courbe

Calculer – Raisonner

Voici quatre courbes et quatre fonctions. Sans utiliser la calculatrice, associer chaque courbe à la fonction qui lui correspond.



- $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = 1 + x + \dfrac{1}{x}$
- $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$
- $k(x) = 1 - x + \dfrac{1}{x}$

43 Polynôme de degré $\geqslant 2$

Calculer – Raisonner

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est donnée par la formule $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{x}$.

a. Calculer l'image de 1.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{2x^2 + x^3 - 1}{x}$.

c. Utiliser votre calculatrice pour étudier le signe du numérateur.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f.

44 STI2D Polynôme de degré $\geqslant 2$

Calculer – Raisonner

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est donnée par la formule $f(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{x}$.

a. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 1}{x^2}$.

b. Utiliser votre calculatrice pour étudier le signe du numérateur.

c. Donner le tableau de variations de la fonction f.

45 Une dérivée à factoriser

Calculer – Raisonner

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est donnée par la formule $f(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$.

a. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{3(x^2 - 4)}{x^2}$.

b. Étudier le signe du numérateur.

c. Donner le tableau de variations de la fonction f.

46 STMG Un voyage à optimiser

Modéliser – Calculer

Un animateur veut organiser un voyage pour x personnes où $x \in [5 ; 50]$ (x n'est pas encore précisément fixé). Le transporteur propose le tarif suivant pour un bus : 100 € de coûts fixes et 5 € par personne.

a. Donner le prix à payer pour 35 personnes.

b. Exprimer le prix total à payer en fonction de x.

c. Montrer que le prix unitaire (le prix par personne) est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{100}{x} + 5$.

d. Compléter à l'aide de votre calculatrice le tableau :

x	10	20	30	40	50
$f(x)$					

e. Quelle est l'équation de l'asymptote à la courbe en $+\infty$? En déduire le prix unitaire à « l'infini ».

47 STMG Plateforme de comptabilité

Modéliser – Communiquer

Sur cette plateforme dédiée à la comptabilité des très petites entreprises, on propose les tarifs suivants : un abonnement initial de 90 € et une prise en charge de 13 € par mois. Pauline est boulangère et elle souhaite étudier le prix pour ce service.

a. Donner le prix que doit payer Pauline pour 10 mois.

b. Exprimer le prix total à payer en fonction de x, où x est le nombre de mois.

c. Montrer que le prix unitaire (le prix par mois) est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{90}{x} + 13$.

d. Compléter à l'aide de votre calculatrice le tableau :

x	10	15	20	24
$f(x)$				

e. Le comptable de Pauline facturait ses services 256 euros par an. Sur deux ans, quelle solution conseillez-vous à Pauline en ne prenant en compte que les aspects financiers : continuer avec son comptable ou prendre un abonnement sur la plateforme ?

48 Coque de téléphone

Modéliser – Communiquer

Dans une entreprise qui produit des coques de téléphone, il faut envisager deux coûts : le coût du moule pour la coque qui est de 2 000 €, puis le coût de la matière première plastique qui est de 35 centimes d'euros par coque.

a. Donner le coût de production de 3 000 coques.

b. Exprimer le coût à payer en fonction de x, où x est le nombre de coques produites.

c. Montrer que le coût unitaire (le coût par coque) est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2000}{x} + 0,35$.

d. Compléter à l'aide de votre calculatrice le tableau :

x	10 000	100 000	200 000
$f(x)$			

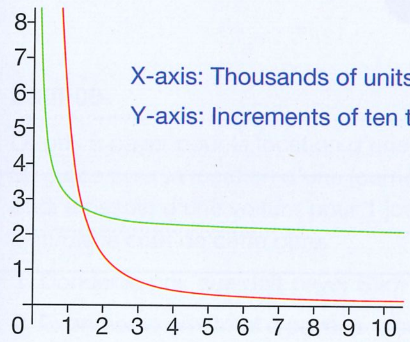
e. L'entreprise souhaite dégager une marge d'au moins 100 %. Elle envisage de vendre plus de 100 000 coques. Quel est le prix de vente que vous lui conseillez ?

49 Maths in English

Costs in digital businesses are different from those found in a traditional industry, such as a car factory. In a digital business, there is a large initial investment in creating software, for example, but selling additional software costs almost nothing.

In a factory that produces automobiles, in contrast, every new vehicle has a significant cost.

Here are two curves that describe the unit cost of a product based on the number (x) of units.



a. Which curve is for the auto plant and which is the digital business?

b. Interpret Image 10 for the digital business and for the industrial company.

50 Une petite entreprise de transport

Modéliser – Calculer

Paul est un routier à son compte. Il distingue deux coûts principaux : l'achat du camion, puis l'entretien et le carburant de ce camion. Un camion coûte 100 000 € et l'entretien et le carburant coûtent environ 1 520 € tous les 1 000 km.

a. Dans l'entreprise de Paul, quels sont les coûts fixes et quels sont les coûts variables ?

b. Soit x le nombre de milliers de kilomètres parcourus. Exprimer les coûts C dans l'entreprise de Paul en fonction de x.

c. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Cette fonction correspond au coût moyen.

Montrer que $f(x) = 1\,520 + \dfrac{100\,000}{x}$.

d. Calculer $f'(x)$.

e. Paul prévoit des contrats pour environ 80 000 km cette année. Quel sera le coût moyen pour lui cette année ?

51 Une chaîne de production

Modéliser – Communiquer

Dans une entreprise qui fabrique des vitres autonettoyantes. Le cout pour aménager la chaîne de production était de 3 500 € et le prix de chaque vitre créée est de 25 €. Ces coûts ont été positionnés dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E
1	Nombre d'unités produites	Coûts fixes	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1	3500	25	3525	3525
3	2	3500	25	3550	1775
4	10	3500	25	3750	375
5	100	3500	25	6000	60
6	1000	3500	25	28500	28,5

a. Quelle formule a été placée dans la cellule D2 ?

b. Quelle formule a été placée dans la cellule E2 ?

c. Si on souhaite atteindre un coût moyen de 26 €, quel doit être le nombre d'unités produites ?

d. Expliquer pourquoi le coût moyen ne peut pas être de 20 €.

52 Simulations

Chercher – Modéliser

Dans une entreprise, la fabrication d'une unité de production est connue, mais les coûts fixes sont encore incertains. Le conseil d'administration décide de faire plusieurs simulations avec ces différents coûts fixes. Le coût de production d'une unité est, lui, bien connu : 25 €.

	A	B	C	D	E
1	Nombre d'unités produites	Coûts fixes	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1000	50 000	25	75000	75
3	1000	100000	25	125000	125
4	1000	150 000	25	175000	175
5	1000	200 000	25	225000	225

a. Quelle formule a été placée dans la cellule D2 ?

b. Quelle formule a été placée dans la cellule E2 ?

c. Le conseil d'administration déclare ne pas vouloir dépasser un coût moyen pour 1 000 unités produites de 150 €. Quelle est alors la valeur maximale des coûts fixes ?

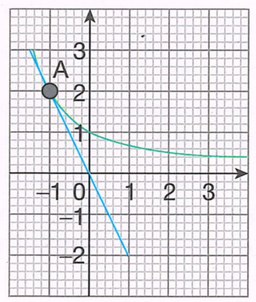
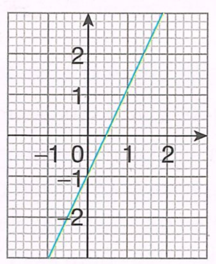
Pdf des Corrigés
liennathan.fr/l65dt0

1re partie de l'épreuve

Automatismes

5 points • [**20 min**]

La 1re partie de l'épreuve est une série de 10 automatismes.

ÉNONCÉ		RÉPONSES
1	Un prix P a augmenté de 15,5 %. Pour calculer le prix après augmentation, il suffit de multiplier P par …	……………………………………………
2	Une augmentation de 20 % suivie d'une réduction de 20 % est équivalente à …	……………………………………………
3	Si la dérivée de f est positive sur l'intervalle [2 ; 3], alors on peut dire que la fonction f est …	……………………………………………
4		L'image de −1 est : ……………………………………………
5		Le coefficient directeur de la tangente en −1 est : ……………………………………………
6	La courbe verte est la courbe représentative d'une fonction f.	L'image de −1 par la fonction f' est : ……………………………………………
7	La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 3x$ est donnée par la formule …	……………………………………………
8		La fonction g est donnée par la formule : $g(x) =$ ……………………………………
9		La fonction g est négative pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle : ……………………………………………
10	La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par la droite représentée ci-dessus.	L'antécédent de −1 est : ………………………

Pdf des Corrigés
liennathan.fr/9wkk40

2de partie de l'épreuve

Exercices

15 points • [**1h 40**]

La 2de partie de l'épreuve est composée généralement de trois exercices, chacun sur 5 points. En voici un exemple.

Exercice commenté

30 min

Énoncé

Le prix à payer pour la location d'une voiture d'entrée de gamme proposée par une entreprise est le suivant : 30 euros pour la location d'une journée puis 10 centimes par kilomètre parcouru.
Sadi a besoin d'une voiture pour 1 journée.
Il étudie le coût de cette offre.

1. Donner le prix que doit payer Sadi pour un trajet de 150 kilomètres.
2. Exprimer le prix total à payer en fonction de x, où x est le nombre de kilomètres parcourus.
3. Montrer que le prix unitaire (le prix par kilomètre) est donné par la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{30}{x} + 0{,}10.$$
4. Compléter à l'aide de votre calculatrice le tableau ci-dessous.

x	100	150	200	250
$f(x)$				

5. Sadi compare cette offre à deux autres, l'offre A et l'offre B.
L'offre A annonce que le montant est de 40 euros la journée quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.
L'offre B annonce que le prix ne dépend que du nombre de kilomètres parcourus : 25 centimes par kilomètre.
Comparer l'offre initiale à chacune de ces offres.

Comprendre l'énoncé

1. Ici, le prix est divisé en deux parts : une part fixe et une part variable.
2. Cette question est une reprise de la question précédente, mais le nombre de kilomètres est maintenant variable et s'écrit x.
3. Le prix unitaire correspond au prix total divisé par le nombre de kilomètres parcourus.
4. On entre la fonction dans la calculatrice, puis on paramètre la plus petite valeur et le pas.
5. Il faut comparer l'offre initiale à l'offre A en utilisant la fonction P ; l'offre initiale à l'offre B en utilisant le prix unitaire.