CHAPITRE 3

Fonctions exponentielles

Les phénomènes de décroissance radioactive sont souvent modélisés par des suites $u(n)$ où n désigne un nombre entier d'années. Mais cette modalisation ne permet pas d'étudier ce qu'il se passe au bout d'un jour ou d'un mois. Les fonctions exponentielles, en revanche, vont nous permettre cette étude.

Testez vos prérequis !

Indiquer la bonne réponse.

Calculs avec les puissances

1 $2^3 \times 2^5 = \dots$

- a. 2^8
- b. 2^{15}
- c. 4^8

2 $\dfrac{3^4}{3^2} = \dots$

- a. 1^2
- b. 3^2
- c. 3^6

3 $(5^4)^7 = \dots$

- a. 5^{11}
- b. 5^{28}
- c. 20^7

Suites géométriques

4 Les nombres 1,5 – 3 – 6 sont les termes consécutifs d'une suite...

- a. géométrique de raison 1,5
- b. géométrique de raison 2
- c. arithmétique de raison 1,5

5 Les nombres 2 – 3 – 4 sont les termes consécutifs d'une suite...

- a. géométrique de raison 1
- b. géométrique de raison 2
- c. arithmétique de raison 1

6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ et de premier terme $u_0 = 3$. Alors...

- a. $u_n = \dfrac{3}{7^n}$
- b. $u_n = \dfrac{3^n}{7}$
- c. $u_n = 3 + \dfrac{n}{7}$

Évolutions

7 Une hausse de 7 % correspond à un coefficient multiplicateur de...

- a. 1,7
- b. 1,07
- c. 0,7
- d. 0,07

8 Une baisse de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de...

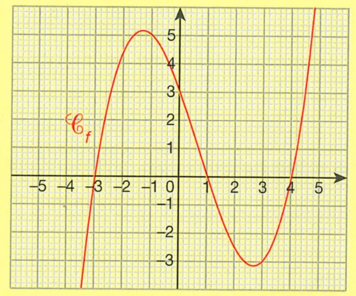
- a. –0,2
- b. –20
- c. 0,8
- d. 1,2

9 Un coefficient multiplicateur de 1,25 correspond à un taux d'évolution de...

- a. +125 %
- b. +25 %
- c. +2,5 %
- d. +0,25 %

Lecture graphique

On considère la courbe représentative d'une fonction f.



10 Graphiquement, l'image de 2 par la fonction f est...

- a. –2,5
- b. 4,5
- c. –2,6 ; 0,4 et 4,2

11 Graphiquement, l'équation $f(x) = 4$ a pour solution(s)...

- a. $S = \varnothing$
- b. $S = \{0\}$
- c. $S = \{-2{,}2 ; -0{,}4 ; 4{,}6\}$

12 Graphiquement, l'inéquation $f(x) > 5$ a pour solution(s)...

- a. $S =]-1{,}7 ; -1[\cup]4{,}7 ; +\infty[$
- b. $S = [-1{,}7 ; -1]\cup]4{,}7 ; +\infty[$
- c. $S = [-1{,}7 ; -1]\cup[4{,}7 ; +\infty[$

13 Graphiquement les extrema (locaux) de f sont...

- a. –1,4 et 2,7
- b. 5,2 et –3,2
- c. $-\infty$ et $+\infty$

Corrigés p. 220

1 Des suites géométriques aux fonctions exponentielles — TABLEUR

COMPÉTENCES
- Modéliser
- Représenter
- Calculer

On a réalisé un placement de 1 000 € à intérêts composés au taux annuel de 0,75 %, les intérêts étant versés chaque quinzaine.

1 **Calculer** le capital obtenu au bout d'un an, de deux ans, de cinq ans, de dix ans.
On note C_n le capital obtenu au bout de n années.

2 **Justifier** que, pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}0075 \times C_n$.

3 **Justifier** que la suite (C_n) des capitaux est une suite géométrique.
En déduire l'expression de C_n en fonction de l'entier naturel n.

4 Quel calcul pourrait-on effectuer pour déterminer le capital obtenu au bout de deux ans et demi ?

5 a) **Modéliser** la situation à l'aide d'un tableur (pour les 100 premières années).
b) **Déterminer** à partir de combien d'années le capital aura dépassé 1 500 €.
c) **Insérer** un nuage de points avec courbe lissée.
Cette courbe permet de lire le capital obtenu à un moment précis.
d) **Lire** sur cette courbe le capital obtenu au bout de deux ans et demi.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1000 \times 1{,}0075^x$.

6 a) Que représente $f(2{,}5)$ dans le contexte de l'exercice ?
b) Même question pour $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

La fonction f est définie à l'aide d'une fonction exponentielle, la fonction exponentielle de base 1,0075, noté $\exp_{1{,}0075}$ et définie par $\exp_{1{,}0075}(x) = 1{,}0075^x$.

2 Variations des fonctions exponentielles — GEOGEBRA

COMPÉTENCES
- Chercher
- Représenter
- Communiquer

Le but de cette activité est de conjecturer les variations des fonctions exponentielles de base a.

1 **Créer** une nouvelle figure Geogebra.

2 **Créer** un curseur a variant de 0 à 10.

3 **Créer** la fonction f définie par $f(x) = a^x$ (on utilisera la touche ^ du clavier pour mettre le x en exposant).

4 **Animer** le curseur a et observer les courbes obtenues.

5 **Compléter** les phrases suivantes :
a) Si $a \in$ ...., alors la fonction exponentielle de base a semble ....
De plus, plus la valeur de a est proche de ...., plus la courbe représentative de la fonction exponentielle de base a semble ....
b) Si $a >$ ...., alors la fonction exponentielle de base a semble ....
De plus, plus la valeur de a est ...., plus la courbe représentative de la fonction exponentielle de base a semble ....

Activités

3 Propriétés algébriques des fonctions exponentielles — TABLEUR

COMPÉTENCES
- Chercher
- Raisonner
- Calculer

Le but de cette activité est de conjecturer des propriétés algébriques des fonctions exponentielles de base a.
À l'aide d'un tableur, réaliser la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	y	x+y	xy	a^x	a^y	a^(-x)	a^(x+y)	(a^x)^y	a^(xy)		a
2	-5	-5										
3	-4	-4										
4	-3	-3										
5	-2	-2										
6	-1	-1										
7	0	0										
8	1	1										
9	2	2										
10	3	3										
11	4	4										
12	5	5										

1 **Choisir** $a = 2$.
a) **Compléter** les formules de cases C2 à J2.
b) **Compléter** les colonnes C à J par un glisser-déposer.
c) **Observer** les résultats obtenus pour conjecturer une relation entre a^x et a^{-x}.
d) **Conjecturer**, de la même manière, une relation entre a^x, a^y et a^{x+y}.
e) **Montrer** que $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$, à l'aide des deux relations précédentes.
f) Que constate-t-on dans les colonnes I et J ?
Quelle relation cela permet-il de conjecturer ?

2 **Choisir** une autre valeur de a pour pouvoir **confirmer** les résultats obtenus précédemment.

1 Définition des fonctions exponentielles

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de raison a).
On appelle **fonction exponentielle de base a**, la fonction notée $\exp_a$ et définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ qui prolonge à des valeurs non entières la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Pour tout nombre réel $x \in [0\,;+\infty[$, on note a^x l'exponentielle de base a de x.
On étend la fonction exponentielle de base a aux nombres réels négatifs en posant $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ pour tout nombre réel positif x.

Vocabulaire

On dit que l'on est passé du discret (suites géométriques) au continu (fonctions exponentielles).

Remarque

Compte-tenu de sa définition (prolongement continu des suites géométriques de raisons strictement positives), on en déduit qu'une exponentielle de base a est **un nombre toujours strictement positif**.

Exemples

- Pour tout nombre réel x, on a donc $1^x = 1$.
- Quel que soit le nombre réel a strictement positif, on a toujours $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- On considère la fonction $f : x \mapsto 1{,}2^x$ (fonction exponentielle de base 1,2).

Déterminons les images de 3 ; $\dfrac{2}{3}$; 4,5 et $-4{,}5$ par cette fonction.

$f(3) = 1{,}2^3 = 1{,}728$

$f(4{,}5) = 1{,}2^{4{,}5} \approx 2{,}272$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 1{,}2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}129$

$f(-4{,}5) = 1{,}2^{-4{,}5} = \dfrac{1}{1{,}2^{4{,}5}} \approx 0{,}440$

2 Propriétés algébriques

On déduit les propriétés algébriques des fonctions exponentielles de base $\boldsymbol{a}$ de celles des puissances entières. D'où la propriété suivante.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Conséquence

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
Dans le cas particulier où $y = \dfrac{1}{n}$, la relation $(a^x)^y = a^{xy}$ devient $(a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$.

Exemples

- $2{,}1^x \times 2{,}1^{\frac{3}{2}} = 2{,}1^{x+\frac{3}{2}}$
- $\dfrac{1{,}015^{-x}}{1{,}015^5} = 1{,}015^{-x-5}$
- $\dfrac{1}{0{,}56^{-2}} = 0{,}56^{-(-2)} = 0{,}56^2$
- $\left(0{,}79^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0{,}79^{\frac{1}{3}\times 3} = 0{,}79^1 = 0{,}79$

Exercice résolu A — Calculer un taux d'évolution moyen

La population de la ville de Paris est passée de 2 125 246 habitants en 1999 à 2 206 488 habitants en 2015. Quel est le taux d'évolution moyen annuel de la population de la ville de Paris de 1999 à 2015 ?

SOLUTION

Le coefficient multiplicateur global de la population parisienne de 1999 à 2015 est :

$C = \dfrac{2206408}{2125246} \approx 1{,}0381.$

Le coefficient multiplicateur moyen annuel de la population parisienne de 1999 à 2015 est alors :

$CMM = C^{\frac{1}{16}} \approx 1{,}0381^{\frac{1}{16}} \approx 1{,}0023.$

Le taux d'évolution moyen annuel de la population parisienne de 1999 à 2015 est donc :

$t_M = CMM - 1 \approx 1{,}0023 - 1 = 0{,}0023$, soit environ 0,23 %.

On en conclut que la population de la ville de Paris a augmenté en moyenne de 0,23 % par an de 1999 à 2015.

Méthode

Calculer un taux moyen

1. On calcule le coefficient multiplicateur global C.
2. On calcule le coefficient multiplicateur moyen : si C est le coefficient multiplicateur global d'une grandeur sur n périodes, alors le coefficient multiplicateur moyen CMM pour une période (relativement aux n périodes) est :

$$CMM = C^{\frac{1}{n}}.$$

3. On passe du coefficient multiplicateur au taux d'évolution grâce à la relation : $t = CM - 1$.

Exercices d'application 22 à 26, p. 85

Exercice résolu B — Calculer des images par une exponentielle

Soit f la fonction exponentielle de base 1,015.

1. Déterminer l'image de 27 par la fonction f à 10^{-1} près et celle de 47 à l'entier près.
2. En déduire l'image de -47 par la fonction f à 10^{-1} près.
3. En déduire l'image de 74 par la fonction f à l'entier près.
4. En déduire l'image de 20 par la fonction f à 10^{-1} près.
5. En déduire l'image de 94 par la fonction f à l'entier près.

SOLUTION

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve $f(27) = 1{,}015^{27} \approx 1{,}5$ et $f(47) = 1{,}015^{47} \approx 2$.
2. On en déduit que :
$f(-47) = 1{,}015^{-47} = \dfrac{1}{1{,}015^{47}} \approx \dfrac{1}{2} \approx 0{,}5.$
3. On en déduit que $f(74) = 1{,}015^{74} = 1{,}015^{27+47}$
$= 1{,}015^{27} \times 1{,}015^{47} \approx 1{,}5 \times 2 \approx 3.$
4. On en déduit que
$f(20) = 1{,}015^{20} = 1{,}015^{47-27} = \dfrac{1{,}015^{47}}{1{,}015^{27}} \approx \dfrac{2}{1{,}5} \approx 1{,}3.$
5. On en déduit que $f(94) = 1{,}015^{94} = 1{,}015^{2\times 47}$
$= (1{,}015^{47})^2 \approx 2^2 \approx 4.$

Exercices d'application 46 et 47, p. 88

Méthode

Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle pour calculer des images

1. Calculer l'image x d'un réel par une fonction f, c'est calculer $f(x)$: remplacer x dans l'expression de f par le réel donné.
Pour calculer l'image d'un réel x par une fonction exponentielle de base a à l'aide de la calculatrice, il suffit de taper a ^ x.
2. On utilise ici l'égalité $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
3. On utilise ici l'égalité $a^x \times a^y = a^{x+y}$.
4. On utilise ici l'égalité $(a^x)^n = a^{nx}$ et le fait que diviser par 1,5, c'est aussi diviser par $\dfrac{3}{2}$ et donc multiplier par $\dfrac{2}{3}$.
5. On utilise ici l'égalité $(a^x)^n = a^{nx}$.

Cours

3 Sens de variation et courbe représentative

On déduit les variations des fonctions exponentielles de base $\boldsymbol{a}$ de celles des suites géométriques. D'où la propriété suivante.

Propriété

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Si $a \in]0\,;1[$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, alors la fonction exponentielle de base a est constante sur $\mathbb{R}$, égale à 1.
- Si $a > 1$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableaux de variations

Si $a \in]0\,;1[$

Valeurs de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	↘

Si $a = 1$

Valeurs de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	→

Si $a > 1$

Valeurs de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	↗

Exemples

- La fonction exponentielle de base $\frac{2}{7}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle de base 3,5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{2^x}{5}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto -0{,}8^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

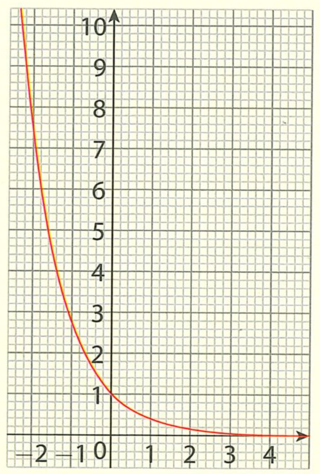
Conséquences

Soient a un nombre réel strictement positif et x et y deux nombres réels.

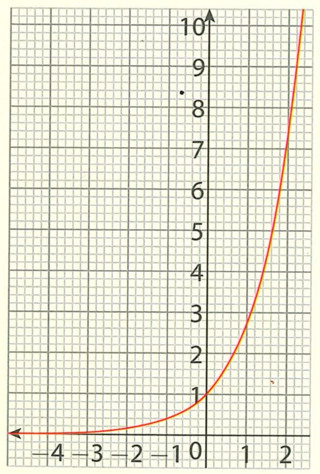
- Si $a \neq 1$, alors $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \text{ si } a > 1 \\ x < y \text{ si } a \in]0\,;1[\end{cases}$

Courbes représentatives

Si $a \in]0\,;1[$



Si $a > 1$



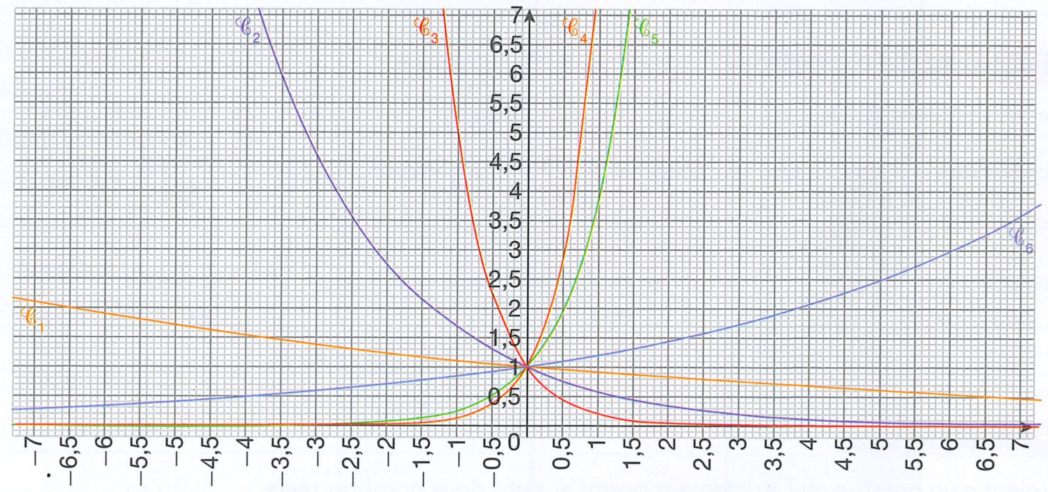
Méthode

Exercice résolu C Reconnaître les courbes des exponentielles de base *a*

Sur le graphique suivant, on a dessiné la courbe représentative de différentes exponentielles. Associer à chaque fonction la courbe représentative qui lui est associée.

$f_1(x) = 1{,}2^x$ $\qquad$ $f_3(x) = 8{,}1^x$ $\qquad$ $f_5(x) = 0{,}2^x$

$f_2(x) = 0{,}6^x$ $\qquad$ $f_4(x) = 3{,}9^x$ $\qquad$ $f_6(x) = 0{,}9^x$



SOLUTION

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ correspondent à des fonctions décroissantes, donc à f_2, f_5, f_6.

$\mathscr{C}_3$ représente la fonction ayant la décroissance la plus rapide donc l'exponentielle dont la base est la plus proche de 0 : elle représente donc f_5.

Selon le même raisonnement, on en déduit que $\mathscr{C}_2$ représente f_2 et $\mathscr{C}_1$ représente f_6.

Les courbes $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$, $\mathscr{C}_6$ correspondent à des fonctions croissantes, donc à f_1, f_3, f_4.

$\mathscr{C}_4$ représente la fonction ayant la croissance la plus rapide donc l'exponentielle dont la base est la plus grande : elle représente donc f_3.

Selon le même raisonnement, on en déduit que $\mathscr{C}_5$ représente f_4 et $\mathscr{C}_6$ représente f_1.

Exercices d'application 40 et 41, p. 87

Méthode

Reconnaître les courbes des exponentielles de base *a*

On utilise les propriétés suivantes en fonction de la valeur de a :

- Si $a \in]0\,;1[$:
  - la fonction est décroissante ;
  - plus a est proche de 0, plus la décroissance de la fonction est rapide, et donc plus sa courbe représentative est proche des axes.
- Si $a > 1$:
  - la fonction est croissante ;
  - plus a est grand, plus la croissance de la fonction est rapide, et donc plus sa courbe représentative est proche des axes.

Fonctions exponentielles

Propriétés algébriques

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Tableaux de variations

Si $a \in]0\,;1[$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	↗	

Si $a = 1$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	→	

Si $a > 1$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto a^x$	↗	

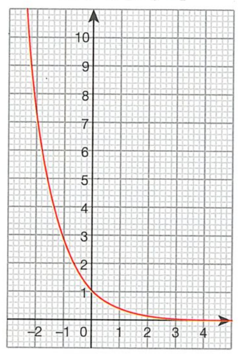
Conséquences

Soient a un nombre réel strictement positif et x et y deux nombres réels.

- Si $a \neq 1$, alors $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \text{ si } a > 1 \\ x < y \text{ si } a \in]0\,;1[\end{cases}$

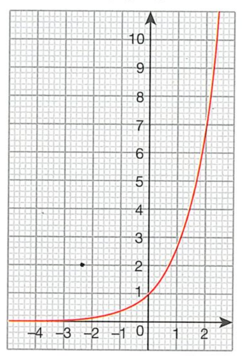
Courbes représentatives

Si $a \in]0\,;1[$



Plus a est proche de 0, plus la courbe représentative est proche des axes.

Si $a > 1$



Plus a est grand, plus la courbe représentative est proche des axes.

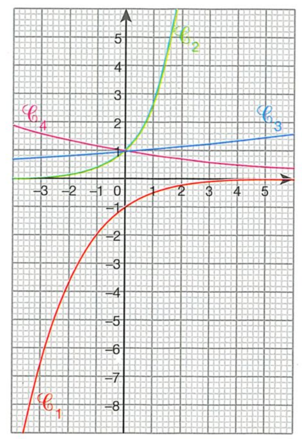
Testez vos connaissances !

Indiquer la bonne réponse.

		A	B	C	D
1	$\dfrac{2^x \times (3^x)^2}{5^x} = \ldots$	$1{,}2^x$	$2{,}4^x$	$3{,}6^x$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \times 3^{x+2}$
2	Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2^x}$ est…	croissante	décroissante	constante	non monotone
3	Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ est…	croissante	décroissante	constante	non monotone
4	L'équation $14{,}7^{-\frac{x}{3}+2} = 14{,}7^{x-4}$ a pour solution…	$S = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$	$S = \left\{-\dfrac{9}{2}\right\}$	$S = \left\{\dfrac{9}{2}; -\dfrac{9}{2}\right\}$	$S = \varnothing$
5	L'inéquation $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{x}{2}-1} \leqslant \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-x-5}$ a pour solution…	$S = \left]-\infty\,;\dfrac{8}{3}\right]$	$S = \left]-\infty\,;-\dfrac{8}{3}\right]$	$S = \left]-\infty\,;\dfrac{8}{3}\right[$	$S = \left]-\infty\,;-\dfrac{8}{3}\right[$
6	L'inéquation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5x+6} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}}$ a pour solution…	$S = \left[\dfrac{185}{156};+\infty\right[$	$S = \left[-\dfrac{185}{156};+\infty\right[$	$S = \left]\dfrac{185}{156};+\infty\right[$	$S = \left]-\dfrac{185}{156};+\infty\right[$

7 *Pour les questions suivantes, on considère le graphique suivant où l'on a tracé les courbes représentatives des fonctions*

$f_1(x) = 0{,}85^x, f_2(x) = -0{,}57^x, f_3(x) = 1{,}08^x, f_4(x) = \left(\dfrac{8}{3}\right)^x$.



	A	B	C	D
a. La courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction…	f_1	f_2	f_3	f_4
b. La courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction…	f_1	f_2	f_3	f_4
c. La courbe $\mathscr{C}_3$ représente la fonction…	f_1	f_2	f_3	f_4
d. La courbe $\mathscr{C}_4$ représente la fonction…	f_1	f_2	f_3	f_4

Corrigés p. 220

1 Taux d'évolution du prix du timbre

TABLEUR

SITUATION

On s'intéresse dans ces travaux pratiques au prix du timbre (au tarif lettre prioritaire) en France depuis 2010.

⇨ **L'objectif est de déterminer son taux d'évolution sur cette période.**

50 min

Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2010	2011	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	0,58 €	0,60 €	0,63 €	0,66 €	0,76 €	0,80 €	0,85 €	0,95 €	1,05 €	1,16 €

A Utilisation du tableur

1. À l'aide d'un tableur, réaliser une feuille de calcul et y recopier les données de l'énoncé dans les lignes 1 et 2.
2. Ajouter une ligne supplémentaire pour calculer le taux d'évolution d'une valeur à la suivante. On ne remplira que la cellule B3 et on utilisera un glisser-déposer pour les autres cellules de la ligne 3.
3. David affirme : « Il y a la même évolution entre 2014 et 2015 et entre 2018 et 2019, puisque, dans les deux cas, le prix du timbre a augmenté de 10 centimes. »

   Nicolas lui répond : « Non ! J'ai trouvé une évolution plus importante entre 2014 et 2015 qu'entre 2018 et 2019. »

   Qu'en pensez-vous ?

B Taux global et taux moyen

1. Calculer le coefficient multiplicateur global du prix du timbre entre 2010 et 2020.

   Commenter ce résultat.
2. En déduire le coefficient multiplicateur moyen annuel du prix du timbre sur la période 2010-2020.
3. À l'aide de ce coefficient multiplicateur moyen, donner une estimation du prix du timbre en France en 2012.

   Ce résultat est-il plausible ?
4. Quel est le taux d'évolution moyen annuel du prix du timbre sur la période 2010-2020 ?

2 Moyennes arithmétiques et géométriques

PYTHON

SITUATION

Loïc a acheté 100 actions de l'entreprise Bonnaffaire en Bourse.
Chaque année, cette entreprise offre à ses actionnaires une action pour dix actions possédées.
Loïc n'étant pas très à l'aise avec les calculs, il a demandé à son conseiller financier combien cela lui ferait d'actions dans un an, dans trois ans, dans sept ans et dans quinze ans.
Son conseiller financier lui apporte la réponse suivante :
- « Au bout d'un an, vous aurez 110 actions ;
- au bout de trois ans, vous en aurez 133 ;
- au bout de sept ans, vous en aurez 193 ;
- au bout de quinze ans, vous en aurez 409 ».

Loïc s'aperçoit qu'il aurait dû demander davantage d'informations à son conseiller financier.

⇨ **Il lui demande une méthode pratique pour obtenir des valeurs à partir de celles qu'il a déjà.**

50 min

Le conseiller financier explique que, s'il connaît les nombres n_1 et n_2 d'actions possédées au bout des années A_1 et A_2 respectivement, il peut procéder comme suit :
- calculer la moyenne arithmétique de A_1 et de A_2 : il obtient alors une valeur A ;
- calculer la moyenne géométrique de n_1 et de n_2 : il obtient alors une valeur n.

Il peut alors considérer que n est une excellente approximation du nombre d'actions qu'il possédera au bout de A années.

A Réalisation d'un programme Python

1. Réaliser une fonction Python qui calcule la moyenne arithmétique de deux nombres. On rappelle que la moyenne arithmétique de deux nombres réels x et y est le nombre $\frac{x+y}{2}$.
2. Réaliser une fonction Python qui calcule la moyenne géométrique de deux nombres. On rappelle que la moyenne géométrique de deux nombres réels positifs x et y est le nombre $\sqrt{xy}$.
3. Utiliser ces deux fonctions Python pour connaître une approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 2 ans, de 5 ans et de 11 ans.
4. Déduire des questions précédentes une approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 4 ans, de 6 ans, de 9 ans et de 13 ans.

B Étude théorique

Soit f la fonction qui, à un nombre réel positif x, associe le nombre d'actions possédées par Loïc au bout de x années.

1. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
3. Retrouver à l'aide de la fonction f une autre approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 4, 5, 6, 9, 11, 13 et 15 ans respectivement.
4. Comment expliquer les écarts avec les résultats obtenus à la partie A ?

Travailler les automatismes du chapitre

Pour travailler les automatismes : PowerPoint Questions flash
liennathan.fr/fu4k46

Calculer avec les exponentielles

1 L'écriture décimale de 2^{-2} est…

2 Calculer : $2^{3,4} \times 2^{1,6} = \dots$

3 Calculer : $\dfrac{3^{5,8}}{3^{2,8}} = \dots$

4 Calculer : $(4^{0,25})^8 = \dots$

5 Calculer : $(5^{0,2})^{-5} = \dots$

Variations des exponentielles

6 Indiquer le sens de variation de la fonction exponentielle de base 12,34.

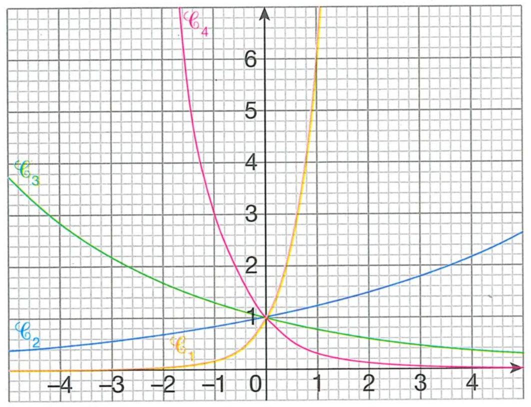
7 Indiquer le sens de variation de la fonction exponentielle de base $\dfrac{2}{3}$.

8 Indiquer le sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{2} \times \dfrac{1}{7^x}$.

9 Indiquer le sens de variation de la fonction $x \mapsto -2^x$.

Courbes représentatives

10 On considère le graphique suivant sur lequel sont représentées les courbes représentatives des fonctions
$f_1 : x \mapsto 1{,}2^x$, $f_2 : x \mapsto 0{,}34^x$, $f_3 : x \mapsto 5{,}6^x$ et $f_4 : x \mapsto 0{,}78^x$.



a. La courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction…
b. La courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction…
c. La courbe $\mathscr{C}_3$ représente la fonction…
d. La courbe $\mathscr{C}_4$ représente la fonction…

Taux d'évolution

11 Le prix d'un article passe de 100 € à 120 €. Quel est le taux d'évolution correspondant ? …

12 Une grandeur augmente de 10 %, puis diminue de 5 %. Indiquer les calculs à effectuer pour obtenir le taux d'évolution global. …

13 Une grandeur subit deux évolutions successives. Le taux d'évolution global est de +20 %.
a. Indiquer les calculs à effectuer pour obtenir le coefficient multiplicateur moyen.
b. Indiquer les calculs à effectuer pour obtenir le taux d'évolution moyen à partir du coefficient multiplicateur moyen.

14 Le taux d'évolution moyen équivalent à 12 évolutions successives de +1 % est…

15 La moyenne arithmétique de 5,8 et 7,6 est égale à…

16 La moyenne géométrique de 3,2 et 5 est égale à…

Travailler les automatismes du BAC

Proportion et pourcentage

1 Calculer 15 % de 50 €.

2 Calculer $\dfrac{1}{3}$ de 36 % sous forme fractionnaire.

Évolution et variations

3 Augmenter de 0,75 % revient à multiplier par… ?

4 Que vaut 320 quand il a baissé de 60 % ?

5 Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 15 à 10 ? Arrondir à 10^{-2}.

6 Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a diminué de 20 % puis de 40 % ?

7 Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une hausse de 100 %.

Calculs numériques et algébriques

8 Simplifier $B = 5^7 \times 5^{-2}$.

9 856 élèves sont inscrits dans un lycée. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'élèves dans ce lycée ?

10 Convertir 52 L en m³.

11 Résoudre $-2x \leqslant 4x - 12$.

12 On donne $t = \dfrac{V_A - V_D}{V_D}$. Exprimer V_D en fonction de t et V_A.

13 Le coût moyen de production C_M est donné par la formule suivante, où C_T représente le coût total de production et N représente le nombre d'objets produits.
Calculer le coût moyen de production sachant que $C_T = 1\,500$ et $N = 30$.

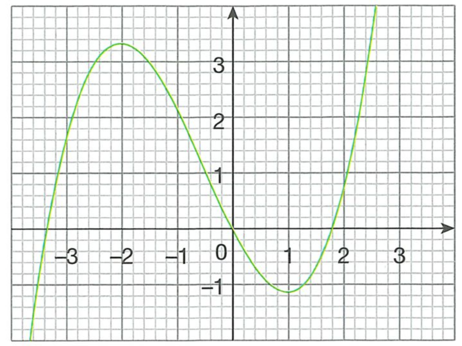
14 Développer et réduire $B = -(x + 2)^2$.

15 Dériver $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Fonctions et représentations

17 Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$.
a) Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
b) Donner une valeur approchée de $f(-3)$
c) Déterminer $f'(-2)$

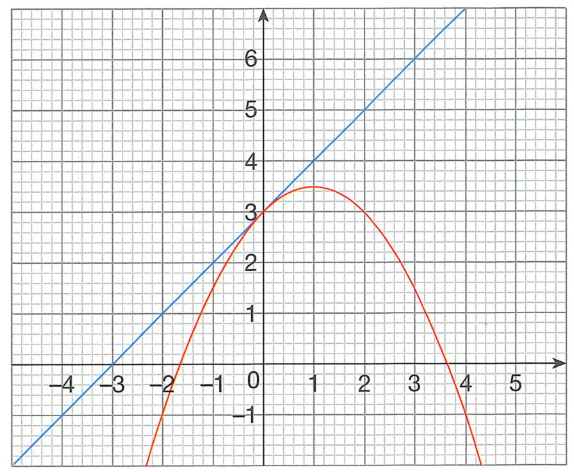


18 Construire le tableau de signes de $-5(x + 2)(x - 7)$.

19 Le point $A(-3 ; 20)$ appartient-il à la courbe d'équation $y = -x^3 - x^2 - x - 1$?

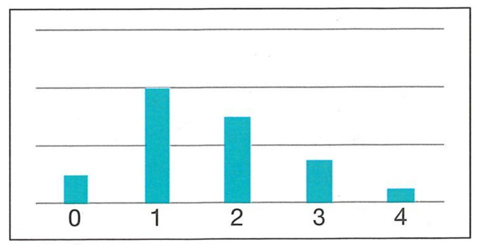
20 Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = -x + 2$.

21 On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(1)$.



Représentations graphiques de données chiffrées

22 On a représenté la série statistique donnant la répartition, en pourcentage, du nombre d'anciens postes occupés par les salariés d'une usine avant leur poste actuel.



Quelle est la valeur d'une graduation ?

Applications directes

Vers les exponentielles

10 min par exercice

1 Un article dont le prix initial est de 100 € augmente de 2 % par an.
Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction exponentielle.

2 Un objet dont le prix initial est de 2 500 € baisse de 4 % par an.
Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction exponentielle.

3 Une colonie de bactéries double sa population tous les jours (initialement, il n'y avait qu'une seule bactérie).
Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction exponentielle.

Calculer avec les exponentielles

10 min par exercice

4 Soit f la fonction exponentielle de base 0,8.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de 12 par la fonction f à 10^{-3} près.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de -53 par la fonction f à 10^{-3} près.

5 Soit f la fonction exponentielle de base 12,5.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de 6 par la fonction f à 10^{-4} près.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de -3 par la fonction f à 10^{-4} près.

6 Soient a un nombre réel strictement positif et x et y deux nombres réels.

a. Développer $(a^x + a^y)^2$.

b. Développer $(a^x - 1)^2$.

c. Montrer que $(a^x + a^y)(a^x - a^y) = a^{2x} - a^{2y}$.

7 Écrire les expressions suivantes sous la forme a^x (a et x désignent deux nombres réels, avec $a > 0$).

a. $A = 2^x \times 3^x$

b. $B = 4^x \times 5^{-x}$

c. $C = 6^{2x} \times \left(\frac{1}{7}\right)^x$

d. $D = \left(\frac{1}{8}\right)^x \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$

8 Développer les expressions suivantes (x désigne un nombre réel).

a. $A = 5^x(6^x - 7^x)$

b. $B = (4^x + 2)(4^x - 4)$

c. $C = (2^x - 1)(2^x + 1)$

d. $D = (0{,}3^{2x} - 1)(1 - 0{,}45^x)$

9 Soit x un nombre réel.
Écrire les expressions suivantes sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta$ (α et β désignent deux nombres réels).

a. $A = 6^x$

b. $B = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c. $C = 72^x$

d. $D = \dfrac{36^x}{8^x \times 3^x}$

10 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

1	Simplifier((0.8^(-x)*(0.8^2)^x)/(0.8^(x-1))) $\rightarrow \frac{4}{5}$
2	Simplifier((10^(x + 2) 10^(x² + 1)) / ((10^x)^x 10^(-x - 2))) $\rightarrow 10^{2x+5}$
3	Simplifier((2^(2x - 2) 8^x) / (2^(3x) 4^(-x - 1))) $\rightarrow (2^x)^4$

Retrouver ces résultats par le calcul.

Taux d'évolution

10 min par exercice

11 Compléter les phrases suivantes.

a. Une hausse de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de…

b. Une baisse de 75 % correspond à un coefficient multiplicateur de…

c. Une hausse de 300 % correspond à un coefficient multiplicateur de…

12 Compléter les phrases suivantes.

a. Un coefficient multiplicateur de 0,955 correspond à un taux d'évolution de …

b. Un coefficient multiplicateur de 1,3 correspond à un taux d'évolution de….

c. Un coefficient multiplicateur de 2 correspond à un taux d'évolution de …

13 Pendant les soldes, le prix d'un pantalon passe de 85 € à 65 €.
Quel est le pourcentage de réduction ?

14 Une enseigne affiche la promotion suivante :
« Trois paquets de café pour le prix de deux ! »
Quel est le pourcentage de réduction ?

15 Suite à une offre exceptionnelle de lancement, un appareil, qui était vendu 450 €, subit une hausse de 7,5 %. Quel est son nouveau prix ?

16 Après remise de 15 %, une voiture est vendue 11 990 €.
Quel était son prix initial ?

17 Le litre d'essence a subi une baisse de 10 %, puis une hausse de 15 %.
Quel est le pourcentage global de variation ?

18 Un vêtement a subi une baisse de 20 %, puis une hausse de 20 %.
Quel est le pourcentage global de variation ?

19 Un commerçant, voyant qu'il vend très bien un article, décide d'en augmenter le prix de 30 %.
Finalement, cette hausse trop importante a considérablement freiné les ventes.
Il décide donc de revenir au prix initial en précisant à ses clients le pourcentage de baisse subi par l'article.
Déterminer ce pourcentage.

20 Une facture de fournitures s'élève à 247,40 € TTC.
Le taux de TVA appliqué est de 20 %.
Déterminer le montant HT de cette facture et en déduire le montant de TVA.

21 Monsieur Losange achète une voiture en Belgique au prix de 14 900 €, avec un TVA de 21 % dans ce pays.
Le concessionnaire lui dit qu'il doit payer la voiture HT en Belgique et la TVA sur le véhicule en France au taux de 20 %.
Combien Monsieur Losange aura-t-il payé sa voiture au total ?

22 Un prix est passé de 120 € à 150 € en 3 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (à 0,1 % près).

23 Un prix est passé de 25 € à 16 € en 10 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (à 0,1 % près).

24 Un prix est passé de 1 € à 1,50 € au bout de la première année, puis de 1,50 € à 4 € au bout de la deuxième année.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

25 Au 1er mars 2008, l'euro s'échangeait contre 1,51890 $ et, au 1er mars 2015, il s'échangeait contre 1,11819 $.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

26 Le prix du pain est passé de 0,56 € en 1993 à 0,87 € (en moyenne) en 2016.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

27 Le prix du carnet de 10 tickets de métro à Paris était de 14,90 € au 1er août 2017. Il a augmenté de 60,2 % par rapport au 1er juillet 2001.
Quel était son prix au 1er juillet 2001 ?

28 TABLEUR On a réalisé la feuille de calcul suivante qui résume l'évolution du nombre d'habitants en France de 2013 à 2016.

	1	2	3	4	5
1	**Année**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**
2	**Population (en millions d'habitants)**	66		66,62	
3	**Taux d'évolution annuel**		0,5%		0%

a. Quelle formule doit-on entrer dans les trois cellules vides ?

b. Réaliser cette feuille de calcul dans un tableur et préciser les résultats obtenus.

c. Déterminer le taux d'évolution global de la population française entre 2013 et 2016.

d. En déduire le taux d'évolution moyen annuel de la population française de 2013 à 2016.

e. En déduire une estimation du nombre d'habitants en France en 2100 en supposant que l'évolution de la population française restera dans la même moyenne que sur la période 2013-2016.

29 TABLEUR On a réalisé la feuille de calcul suivante qui résume l'évolution du nombre d'habitants dans la ville de Dubaï entre 1968 et 2016.

	1	2	3	4
1	**Année**	**1968**	**1995**	**2016**
2	**Population**	58970		
3	**Taux d'évolution annuel**		1143,0%	
4	**Coefficient multiplicateur**			4

a. Quelle formule doit-on entrer dans les quatre cellules vides ?

b. Réaliser cette feuille de calcul dans un tableur et préciser les résultats obtenus.

c. Déterminer le taux d'évolution global de la population de Dubaï entre 1968 et 2016.

d. En déduire le taux d'évolution moyen annuel de la population de Dubaï de 1968 à 2016.

e. En déduire une estimation du nombre d'habitants à Dubaï en 2100 en supposant que l'évolution de la population de Dubaï restera dans la même moyenne que sur la période 2013-2016.

Variations

30 Dans chacune des questions, comparer les deux nombres sans utiliser les calculatrices.

a. $7{,}7^7$ et $7{,}7^{\frac{1}{7}}$

b. $0{,}8^{5{,}2}$ et $0{,}8^{9{,}4}$

c. $1{,}2^{\frac{5}{3}}$ et $1{,}2^{\frac{11}{2}}$

d. $4{,}5^{-2}$ et $4{,}5^{-4}$

10 min par exercice

31 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto 8^x$

b. $g : x \mapsto 0{,}123^x$

c. $h : x \mapsto 4{,}567^x$

32 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{11}\right)^x$

b. $g : x \mapsto \left(\dfrac{7}{3}\right)^x$

c. $h : x \mapsto \left(\dfrac{1{,}2}{3{,}4}\right)^x$

33 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto 1{,}2 \times 3{,}45^x$

b. $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2} \times 7^x$

c. $h : x \mapsto (-2)^2 \times 1{,}9^x$

34 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

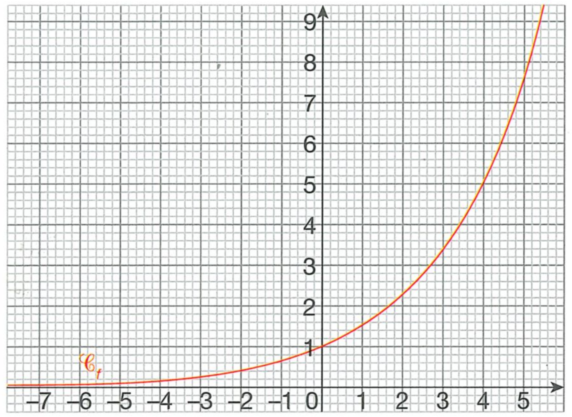
a. $f : x \mapsto \dfrac{8}{11} \times 0{,}95^x$

b. $g : x \mapsto -2 \times 0{,}3^x$

c. $h : x \mapsto -0{,}5 \times 0{,}9^x$

Courbes représentatives

35 Soit f la fonction exponentielle de base 1,05. On a tracé sa courbe représentative.



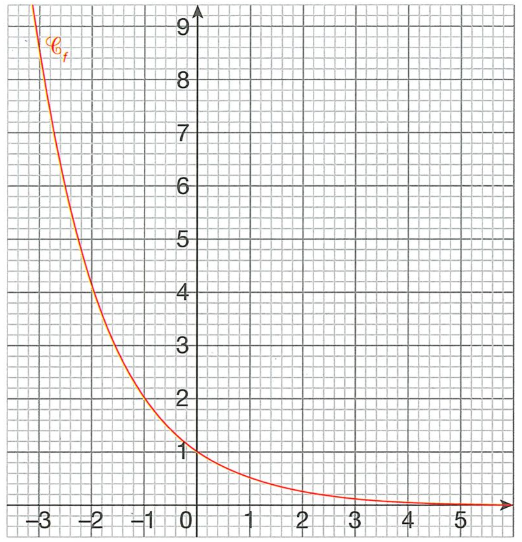
a. Lire graphiquement l'image de 1.

b. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 3.

c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$

d. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 4$.

36 Soit f la fonction exponentielle de base 1,05. On a tracé sa courbe représentative.



a. Lire graphiquement l'image de -1.

b. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 5.

c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 7$

d. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

37 **1.** Soit f la fonction exponentielle de base 0,8.

a. Préciser le sens de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$. On arrondira le résultat au dixième.

2. Soit g la fonction exponentielle de base 2,7.

a. Préciser le sens de variation de la fonction g.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

c. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 3$. On arrondira le résultat au dixième.

3. Résoudre algébriquement l'équation $4{,}75^{2x+1} = 4{,}75^3$.

4. Résoudre algébriquement l'inéquation $1{,}5^{x-2} > 1{,}5^{-1}$.

5. Résoudre algébriquement l'inéquation $0{,}82^{3x+4} > 0{,}82^5$.

38 Soit f la fonction exponentielle de base 1,2.

a. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 15]$.

b. Lire graphiquement l'image de -5.

c. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 10.

d. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$

e. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 5$.

39 Soit f la fonction exponentielle de base 0,75.

a. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$.

b. Lire graphiquement l'image de -8.

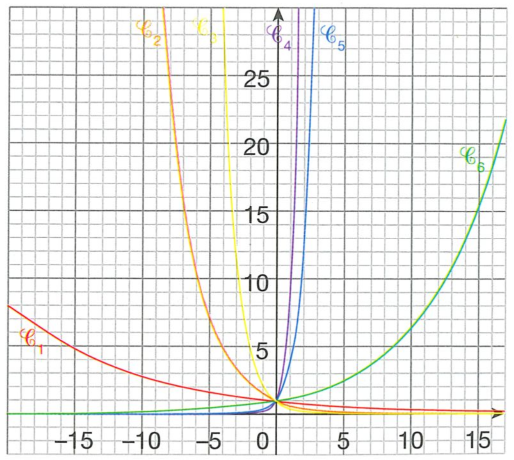
c. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 4

d. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 5$

e. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$.

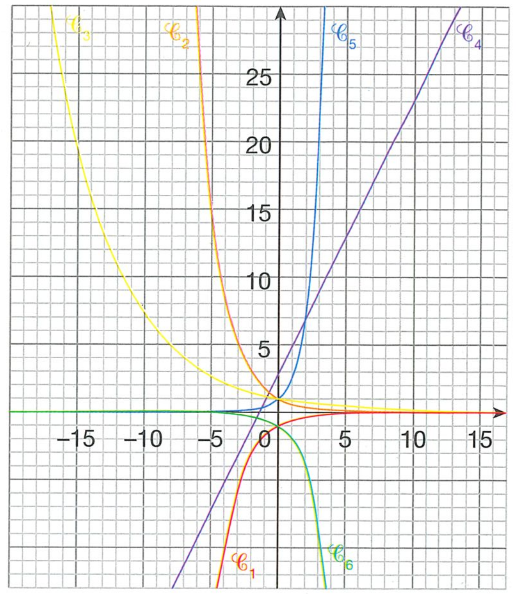
40 Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 0{,}9^x$, $f_2(x) = 1{,}2^x$, $f_3(x) = 0{,}43^x$, $f_4(x) = 3{,}54^x$, $f_5(x) = 0{,}67^x$, $f_6(x) = 8{,}9^x$



41 Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 2{,}79^x$, $f_2(x) = 0{,}82^x$, $f_3(x) = -2^x$, $f_4(x) = 0{,}58^x$, $f_5(x) = -0{,}56^x$, $f_6(x) = 2x + 3$



Résolutions d'équations et d'inéquations

42 Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : 12^{2x} = 0$

b. $(E_2) : 0{,}6^{x-1} = 0{,}6$

c. $(E_3) : 1{,}75^{x+3} = 1{,}75^5$

43 Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-7} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

b. $(E_2) : 3{,}33^{-x-1} = 3{,}33^{-2x-1}$

c. $(E_3) : 7^{x-1} - 7^{1-x} = 0$

44 Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : 1{,}02^x > 1{,}02$

b. $(I_3) : 5^x \leqslant 5^2$

c. $(I_3) : 0{,}43^x \leqslant 0$

45 Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : \sqrt{2}^{x+1} \geqslant \sqrt{2}^{-x-1}$

b. $(I_2) : \left(\frac{1}{9}\right)^{-x-2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3x+4}$

c. $(I_3) : 11^{\frac{1}{11}x} > 11^{x-11}$

Approfondissement

46 Exponentielle et calculatrice (1)

Calculer – Chercher

Soit f la fonction exponentielle de base 2,3.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de 4,5 par la fonction f à 10^{-3} près.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de $\frac{5}{2}$ par la fonction f à 10^{-3} près.

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de $-\frac{5}{2}$ par la fonction f à 10^{-1} près.

d. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de 9 par la fonction f à 10^{-2} près.

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de 7 par la fonction f à 10^{-1} près.

f. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de 2 par la fonction f à 10^{-2} près.

47 Exponentielle et calculatrice (2)

Calculer – Chercher

Soit f la fonction exponentielle de base 0,55.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de $-\frac{1}{3}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'image de $\frac{5}{12}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

d. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de $\frac{5}{4}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de $\frac{1}{12}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

f. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'image de $\frac{3}{4}$ par la fonction f à 10^{-2} près.

48 On simplifie !

Calculer – Chercher

Simplifier les expressions suivantes le plus possible (x désigne un nombre réel).

a. $A = 2^x \times 2^{2x+1} \times 2^{-x}$

b. $B = 0{,}33^{-x} \times 0{,}33^{\frac{x}{3}} \times (0{,}33^{3x})^3$

c. $C = \dfrac{3^x \times 3^{-x+2}}{3^{2x}}$

49 On factorise !

Calculer – Chercher

Factoriser les expressions suivantes (x désigne un nombre réel).

a. $A = 2^x + 4^x - 6^x$

b. $B = 9^x - 4$

c. $C = 25^x - 4 \times 5^x + 4$

d. $D = 4^x + 2^{x+2} + 4$

50 Facture d'électricité

Calculer – Chercher

Sur une facture d'électricité, deux taux de TVA sont appliqués : 5,5 % pour l'abonnement et 20 % pour les consommations. Le prix de l'abonnement HT est de 7,16 € par mois.

a. Un client a une consommation HT de 32,43 €. Quel est le montant TTC de sa facture ?

b. Un autre client a une facture TTC de 39,59 €. Quel a été le montant HT de sa consommation ?

51 Maths in English

Telephone bill

On 1 January 2011 the VAT on "composite subscriptions" including television (whether it be for a fixed internet access or a mobile plan) went from 5.5% to 19.6%. On 1 January 2014 the VAT increased again, from 19.6% to 20%. A customer has had a subscription with an operator since 2008, when he paid €29.90 per month.

a. What did his subscription cost between 1 January 2011 and 31 December 2013?

b. What has his subscription cost since 1 January 2014?

c. Calculate the rate of increase of his subscription between prior to 1 January 2011 and after 1 January 2014.

d. From this, deduce the average annual rate of change between 2010 and 2014.

52 PYTHON CM, CMM et TM

Calculer – Chercher

On considère la fonction Python suivante.

```
def taux(vi,vf,n):
    CM=vf/vi
    CMM=(vf/vi)**(1/n)
    TM=(CMM-1)*100
    return(TM)
```

a. À quoi correspondent les arguments `vi`, `vf` et `n` de la fonction ?

b. À quoi correspondent les variables `CM`, `CMM` et `TM` ?

c. En déduire le but de cette fonction.

d. Programmer cette fonction et l'exécuter pour retrouver le résultat de l'exercice résolu 3.

53 Évolution boursière

Calculer – Chercher

En une année, une action a gagné 2,42 % au 1er trimestre, puis 1,83 % au 2e trimestre pour reculer de 0,95 % au 3e trimestre.

Un actionnaire ne retrouve pas le taux d'évolution pour le 4e trimestre, mais il a noté que le taux de croissance moyen trimestriel de cette action est de +1,59 % sur cette année.

Retrouver le taux d'évolution de cette action pour le 4e trimestre.

54 Sens de variation (1)

Chercher – Communiquer

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \pi^x$

b. $g : x \mapsto \sqrt{2}^x$

c. $h : x \mapsto (\sqrt{3} - 1)^x$

55 Sens de variation (2)

Chercher – Communiquer

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto (2^x)^4$

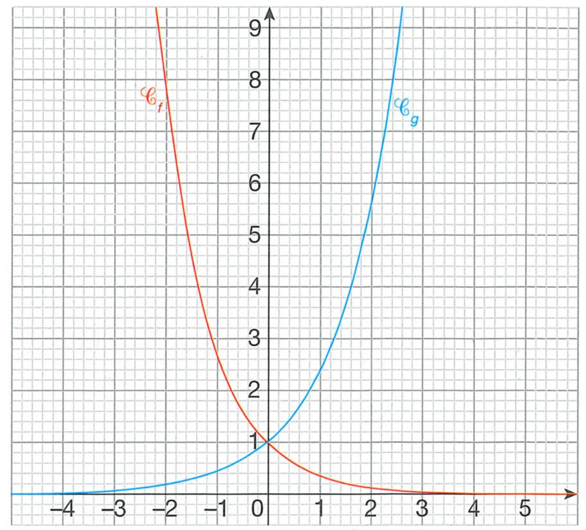
b. $g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x \times 3^x$

c. $h : x \mapsto \dfrac{5^x}{0{,}1^x}$

56 Lecture graphique

Calculer – Chercher

Soient f la fonction exponentielle de base 0,36 et g la fonction exponentielle de base 2,34. On a tracé leurs courbes représentatives respectives.



a. Lire graphiquement l'image de -2 par f.

b. Lire graphiquement l'image de -1 par g.

c. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 4 par f.

d. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de $-\frac{1}{2}$ par g.

e. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$

f. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 8$

g. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
Aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

h. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 5$.

i. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > 0$.
Aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

j. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.
Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

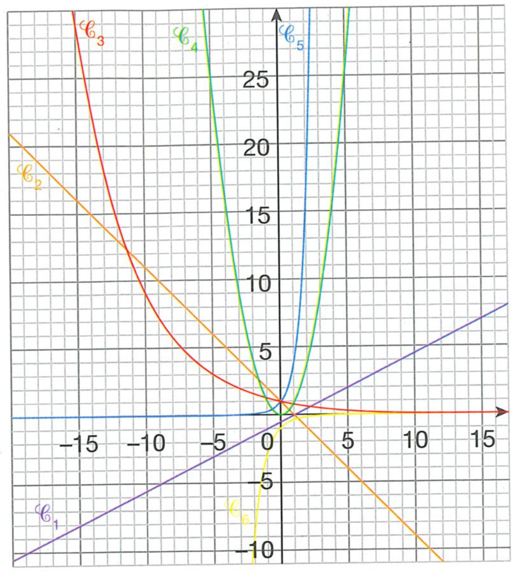
57 Reconnaître la bonne courbe

Raisonner – Communiquer

Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 4^x$, $f_2(x) = 1{,}25^{-x}$, $f_3(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f_4(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

$f_5(x) = -x + 1$, $f_6(x) = x^2$



58 Équations XXL

Calculer – Chercher

Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : 15^{x^2} = 15^9$

b. $(E_2) : \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x-\frac{1}{3}}$

c. $(E_3) : 2^{x-2} = 2^{2+x}$

59 Inéquations XXL

Calculer – Chercher

Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : (1{,}2345^{x+6})^7 \geqslant 1{,}2345^{8x+9}$

b. $(I_2) : 3^x \times 5^x < 15^{3x+5}$

c. $(I_3) : 0{,}01^{2x-0{,}3} > (0{,}01^2)^{x-0{,}2}$

60 GEOGEBRA PYTHON Évolution d'une population

Modéliser – Représenter

Un village de 1 500 habitants voit sa population augmenter de 5,5 % par an.

a. Modéliser la situation à l'aide d'une fonction f.

b. Calculer la population de cette commune au bout de 10 ans.

c. À l'aide du logiciel Geogebra, tracer la courbe représentative de la fonction f.

d. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra un bourg (au moins 2 000 habitants).

e. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une petite ville (au moins 5 000 habitants).

f. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une ville moyenne (au moins 20 000 habitants).

g. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une grande ville (au moins 50 000 habitants).

h. On considère le programme Python suivant.

```
P=1500
n=0
while P<200000:
    n=n+1
    P=P*1.055
```

Expliquer le but de ce programme.

i. Une métropole est une commune ayant plus de 200 000 habitants.
Au bout de combien d'années notre village deviendra-t-il une métropole ?

61 STI2D Décroissance radioactive

Chercher – Représenter

La décroissance radioactive est la réduction du nombre de noyaux radioactifs dans un échantillon.

On considère un échantillon de matériaux radioactifs et on note $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t (exprimé en années).

On modélise la décroissance radioactive de cet échantillon par la relation :

$$N(t) = 10 \times 2^{-\frac{t}{30}}.$$

a. Déterminer le nombre de noyaux de l'échantillon à l'état initial.

b. Déterminer le nombre d'atomes dans l'échantillon au bout de dix ans.

c. Déterminer les variations de la fonction N.
Cela est-il cohérent avec la situation modélisée ?

d. Tracer la courbe représentative de la fonction N (on prendra 1 cm pour deux ans et 1 cm pour un atome).

e. On appelle « période radioactive » la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux présents dans l'échantillon est réduit de moitié.
Déterminer graphiquement la période radioactive de l'échantillon.
Retrouver ce résultat par le calcul.

62 STL Pharmacocinétique

Chercher – Représenter

On évalue la pharmacocinétique d'un médicament grâce à la concentration de son principe actif dans le sang.

On a modélisé la concentration en milligrammes de ce principe actif par litre de sang par la fonction f définie par $f(t) = t(6-t)\left(\frac{7}{5}\right)^t$ où t désigne le temps en heures.

a. Dresser le tableau de signe du produit $t(6-t)$.

b. En déduire le signe de la fonction f.

c. Au bout de combien de temps le médicament est-il complètement éliminé ?

d. Calculer la concentration de ce principe actif une heure après la prise de ce médicament.

e. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur un intervalle bien choisi (on prendra 1 cm pour une heure et 0,5 cm pour 1 mg/L).

f. Il est conseillé au patient une prise de ce médicament toutes les six heures.
Justifier cette préconisation.

g. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 12$.

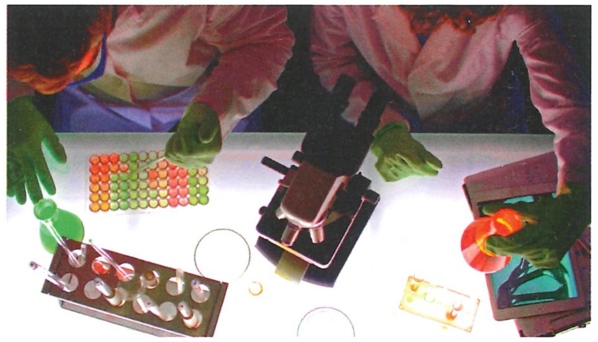
h. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geqslant 20$.

i. On considère que ce médicament est efficace lorsque la concentration de son principe actif dans le sang est supérieure (ou égale) à 10 mg/L.
Au bout de combien de temps ce médicament commence-t-il à être efficace ?
Préciser également la durée d'efficacité de ce médicament.

j. Déterminer graphiquement la concentration maximale (arrondie à l'entier) du principe actif dans le sang.
Préciser au bout de combien de temps ce maximum est atteint.

k. On appelle « demi-vie d'élimination » le temps au bout duquel la concentration maximale du principe actif a diminué de moitié.
Déterminer graphiquement cette demi-vie.

l. Décrire l'évolution de la concentration de ce principe actif dans le sang.



Exercices

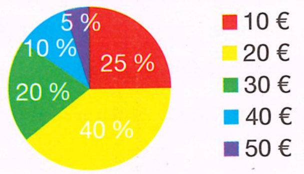
Pdf des Corrigés
liennathan.fr/51k8ha

1re partie de l'épreuve — Automatismes

5 points • 20 min

La 1re partie de l'épreuve est une série de 10 automatismes.

ÉNONCÉ	RÉPONSES
1 Quelle proportion représentent 20 % de 30 % d'une grandeur ?	....
2 Une grandeur a baissé de 50 %. Quel taux d'évolution doit-on lui appliquer pour qu'elle retrouve sa valeur initiale ?	....
3 Comparer $\frac{10}{7}$ et $\frac{11}{8}$.	$\frac{10}{7} \dots \frac{11}{8}$
4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - \frac{1}{64} = 0$	$S =$ ....
5 Calculer la dérivée du polynôme $P(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4{,}5x - 8$	$P'(x) =$ ....
6 Le plan est muni d'un repère. Le point A de coordonnées (3 ; 2) appartient-il à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 5x + 3$?	....
7 Déterminer les coordonnées de deux points de la droite D d'équation $y = -x + 3$.	....
8 On considère une série statistique dont on a une représentation par un diagramme circulaire qui représente la fréquence d'articles vendus dans un magasin qui n'applique que des « prix ronds ».	Quelle est la fréquence d'articles à 40 € vendus ? ....
9	Quel calcul doit-on effectuer pour calculer le prix moyen des articles vendus ? ....
10	Quelle est la médiane de la série ? ....



Pdf des Corrigés
liennathan.fr/ucw038

2de partie de l'épreuve — Exercices

15 points • 1 h 40

La 2de partie de l'épreuve est composée généralement de trois exercices, chacun sur 5 points. En voici un exemple.

Exercice commenté

30 min

Énoncé

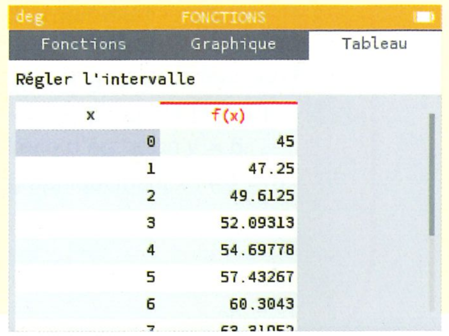
Après un an d'installation, un commerçant réalise un chiffre d'affaires de 45 000 €. Il a mis en œuvre des actions commerciales pour atteindre son objectif d'accroître son chiffre d'affaires de 5 % par an, avec une hausse régulière chaque année.

On appelle CA la fonction qui, à un réel t positif, associe l'objectif de chiffre d'affaires en milliers d'euros, t années après la première année d'installation.

1. Justifier que, pour tout réel positif t, on a $CA(t) = 45 \times 1{,}05^t$.
2. Déterminer les variations de la fonction CA sur $[0 ; +\infty[$. Justifier la réponse.
3. Calculer l'objectif de chiffre d'affaires au bout d'un an et demi, de 5 ans et de 10 ans (on arrondira à la centaine d'euros).
4. Tracer la courbe représentative de la fonction CA sur l'intervalle $[0 ; 20]$ (on prendra 1 cm pour deux ans en abscisse et 1 cm pour 10 000 € en ordonnées).
5. Déterminer graphiquement au bout de combien d'années le commerçant peut espérer avoir un chiffre d'affaires dépassant les 100 000 €.

Comprendre l'énoncé

1. Il faut prêter attention à la valeur initiale qui doit être exprimée en milliers d'euros. On utilise la relation entre taux d'évolution τ et le coefficient multiplicateur CM qui est $CM = 1 + \tau$ et on convertit le pourcentage en nombre décimal.
2. On utilise le résultat du cours qui indique les variations de la fonction exponentielle de base a en fonction de la valeur de a. Ensuite, on observe le signe du coefficient multiplicateur pour conclure.
3. Il faut faire attention à la façon dont la fonction CA est définie : $CA(t)$ est l'objectif de chiffre d'affaires du commerçant en milliers d'euros, t années après la première année d'installation. Ainsi, pour obtenir le chiffre d'affaires au bout de x années, il faudra calculer $CA(x - 1)$.
4. Pour tracer la courbe représentative d'une fonction exponentielle de base a, on détermine quelques points à l'aide de la calculatrice. Sur l'écran de la calculatrice, on obtient ceci :



On fait attention aux unités données dans l'énoncé.

5. Il faut déterminer l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 100. On laisse les traits apparents sur le graphique pour justifier. On fait à nouveau attention à la définition de la fonction CA (t années après la première année d'installation).