# REPETITION D'EXPERIENCES ALEATOIRES

**Vidéo** https://youtu.be/fSGGe2-L3Ag

## I. Expériences aléatoires à deux épreuves

Méthode : Calculer une probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves

**Vidéo** https://youtu.be/xeuRc8WIQn4

1) Situation exemple :

Léa tente l'expérience suivante avec ses vêtements :

Elle dépose dans un panier 4 chemisiers indiscernables au toucher :

1 blanc, 1 rouge et 2 verts.

Dans un autre panier, elle y dépose 2 jupes également indiscernables au toucher : 1 blanche et 1 noire.

Elle tire successivement et au hasard, un chemisier du premier panier et une jupe du deuxième panier.

Ces deux expériences, « tirer un vêtement dans chaque panier », sont dites **indépendantes**.

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

Exercice :

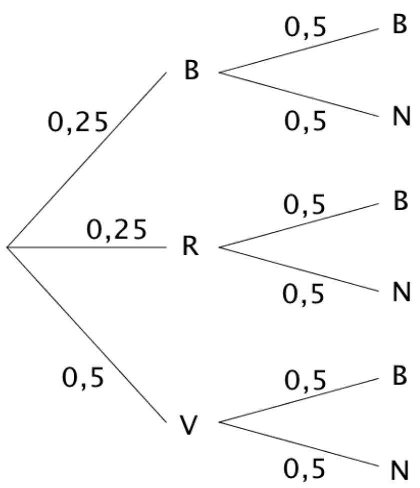
1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité $P_1$ d'obtenir deux vêtements blancs.
3) Calculer la probabilité $P_2$ de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire.

**à vous de jouer !**

**Solution :**

1) le premier panier contient 2 chemisiers verts sur 4 en tout, donc la probabilité de tirer un chemisier vert est égale à 0,5 soit $p(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

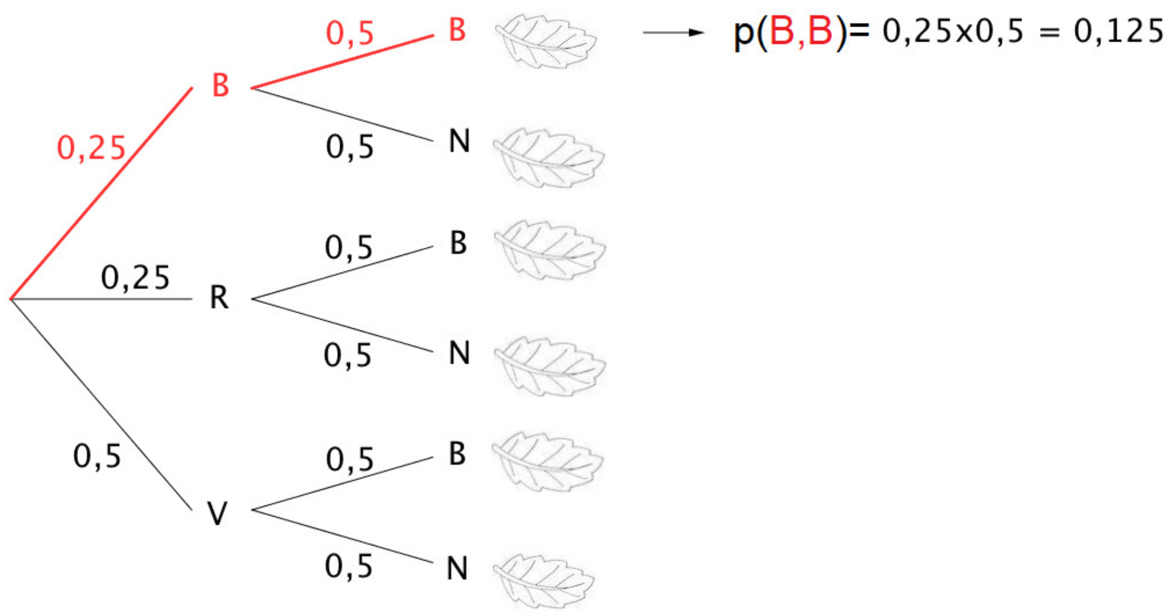
Même raisonnement pour le calcul de $p(R) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et pour $p(B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$




2) <u>Technique de calcul sur un arbre pondéré :</u>

La probabilité d'une issue est égale au **produit** des probabilités portées par les branches formant le chemin conduisant à cette issue.

La probabilité d'obtenir deux vêtements blancs correspond aux issues p(B ; B),
Sur un « chemin de branches », les probabilités se multiplient donc :

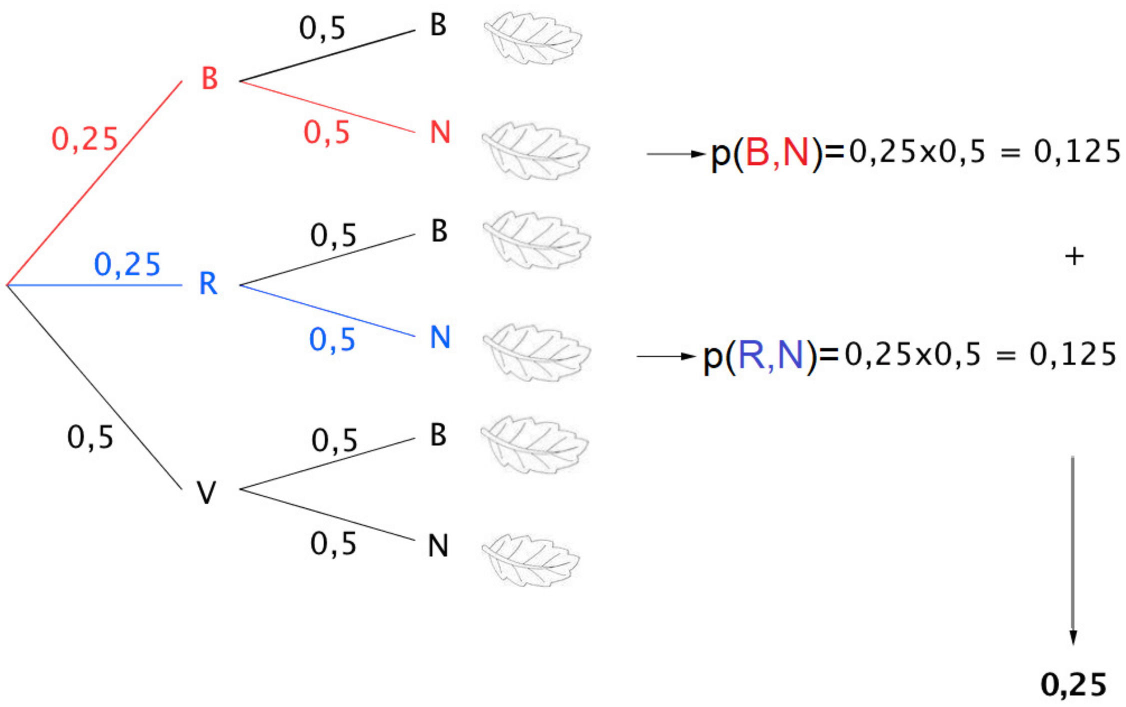


**Solution :**

Soit : $P_1$ = P(B ; B) = 0,25 x 0,5 = 0,125.
La probabilité d'obtenir deux vêtements blancs est égale à 12,5 %.

3) La probabilité de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire correspond aux issues (B ; N) et (R ; N).

La probabilité d'un événement est égale à la **somme** des probabilités des issues qui le réalisent.




Les probabilités de « plusieurs feuilles » s'additionnent donc :

$P_2$ = P(B ; N) + P(R ; N) = 0,25 x 0,5 + 0,25 x 0,5 = 0,125 + 0,125 = 0,25.
La probabilité de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire est égale à 25 %.

## II. Loi de Bernoulli

### 1) Définitions

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Remarque :

Par convention on associe
- le nombre 1 au succès
- le nombre 0 à l'échec.

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face".

2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un 1" et comme échec "ne pas obtenir un 1".
La loi de Bernoulli associée à cette expérience est :

| $x_i$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

Définition :

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- la probabilité d'obtenir 1 (ou un succès) est égale à $p$,
- la probabilité d'obtenir 0 (ou un échec) est égale à $1 - p$.

$p$ est appelé le **paramètre** de la loi de Bernoulli.

On peut résumer la loi de Bernoulli de paramètre $p$ dans le tableau :

| $x_i$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p$ | $1 - p$ |

Exemples : Dans les exemples présentés plus haut : 1) $p = \frac{1}{2}$ 2) $p = \frac{1}{6}$.

2) Espérance

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

Alors :

$$E(X) = p$$

Démonstration :

$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

Méthode : Reconnaître une situation modélisée par une loi de Bernoulli

Après la correction d'un contrôle, le professeur compte que 24 élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, et 6 ne l'ont pas obtenue.
Le professeur choisit une copie au hasard. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi de Bernoulli.

**Solution**

Cette expérience aléatoire possède deux issues.

La probabilité de l'issue : « la copie indique une note supérieure ou égale à 10 » est égale à $p = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

On peut ainsi considérer comme succès l'événement : « la copie indique une note supérieure ou égale à 10 ».
La situation est donc modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{5}$.

## 3) Répétitions d'épreuves de Bernoulli : schéma de Bernoulli

Définitions :

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

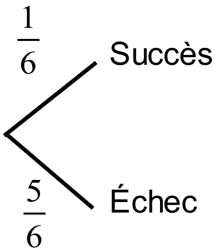
Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.**

Exemple 1 :

On lance 5 fois de suite un dé à six faces et on note à chaque fois le résultat.
À chaque lancer, on considère comme succès : "*obtenir un six*"
et comme échec : "*ne pas obtenir un six*".

On répète ainsi 5 fois de suite la même expérience de Bernoulli (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre : un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer.

Pour chaque expérience (lancer de dé), on a les probabilités suivantes :




On répète cette expérience 5 fois, avec à chaque **épreuve** une probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$.

On dit ici que $n$ = 5 et $p = \frac{1}{6}$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

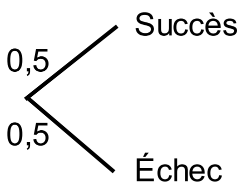
Exemple 2 :

On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie.

On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".

Ces expériences de Bernoulli sont identiques et indépendantes.

Pour chaque expérience, on a les probabilités suivantes :




On dit ici que $n$ = 20 et $p = 0,5$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Méthode : Calculer une probabilité associée à une épreuve de Bernoulli

**Vidéo** https://youtu.be/d8YAbeWou1E

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.

On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :
   a) On tire deux boules blanches.

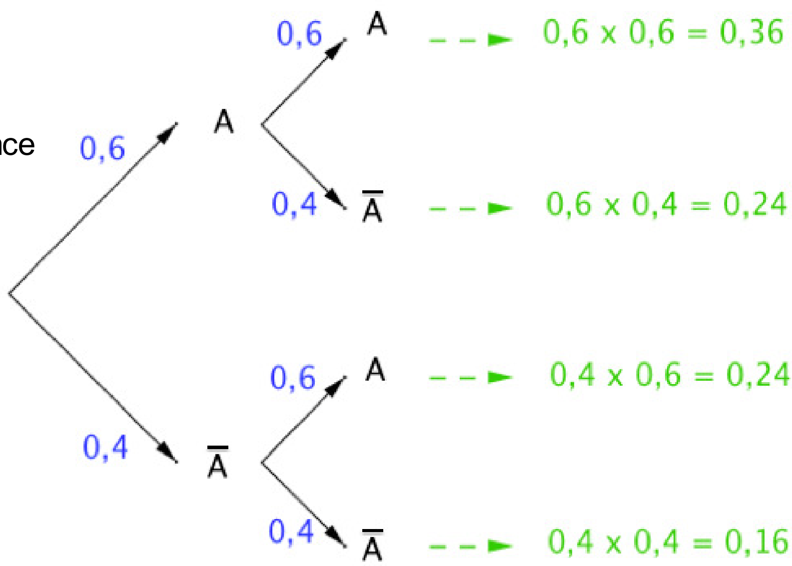
b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
c) On tire au moins une boule blanche.

## Solution

1) On note $A$ l'issue "On tire une boule blanche" et $\overline{A}$ l'issue contraire "On tire une boule rouge".

$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P(\overline{A}) = \frac{2}{5} = 0,4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré :




2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue $(A\ ;\ A)$ :
$P_1 =$ 0,36 (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues $(A\ ;\ \overline{A})$ et $(\overline{A}\ ;A)$
$P_2$ = 0,24 + 0,24 = 0,48.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues $(A;\ \overline{A})$, $(A;A)$ et $(\overline{A}\ ;\ A)$ :
$P_2$ = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84.

Remarques :

- on considère l'épreuve de Bernoulli : « tirer une boule au hasard » dont le succès est « obtenir une boule blanche »

  A chaque épreuve, la probabilité du succès est P($A$) = $\frac{3}{5}$ = 0,6.

  On répète cette épreuve deux fois de façon identique et indépendante.
  On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ = 2 et $p$= 0,6.

- Soit B l'événement : « On tire au moins une boule blanche»
  L'événement contraire de B est $(\overline{A}\ ;\ \overline{A})$

  donc P(B) = 1 – P$(\overline{A}\ ;\ \overline{A})$
  = 1 – 0,16
  = 0,84