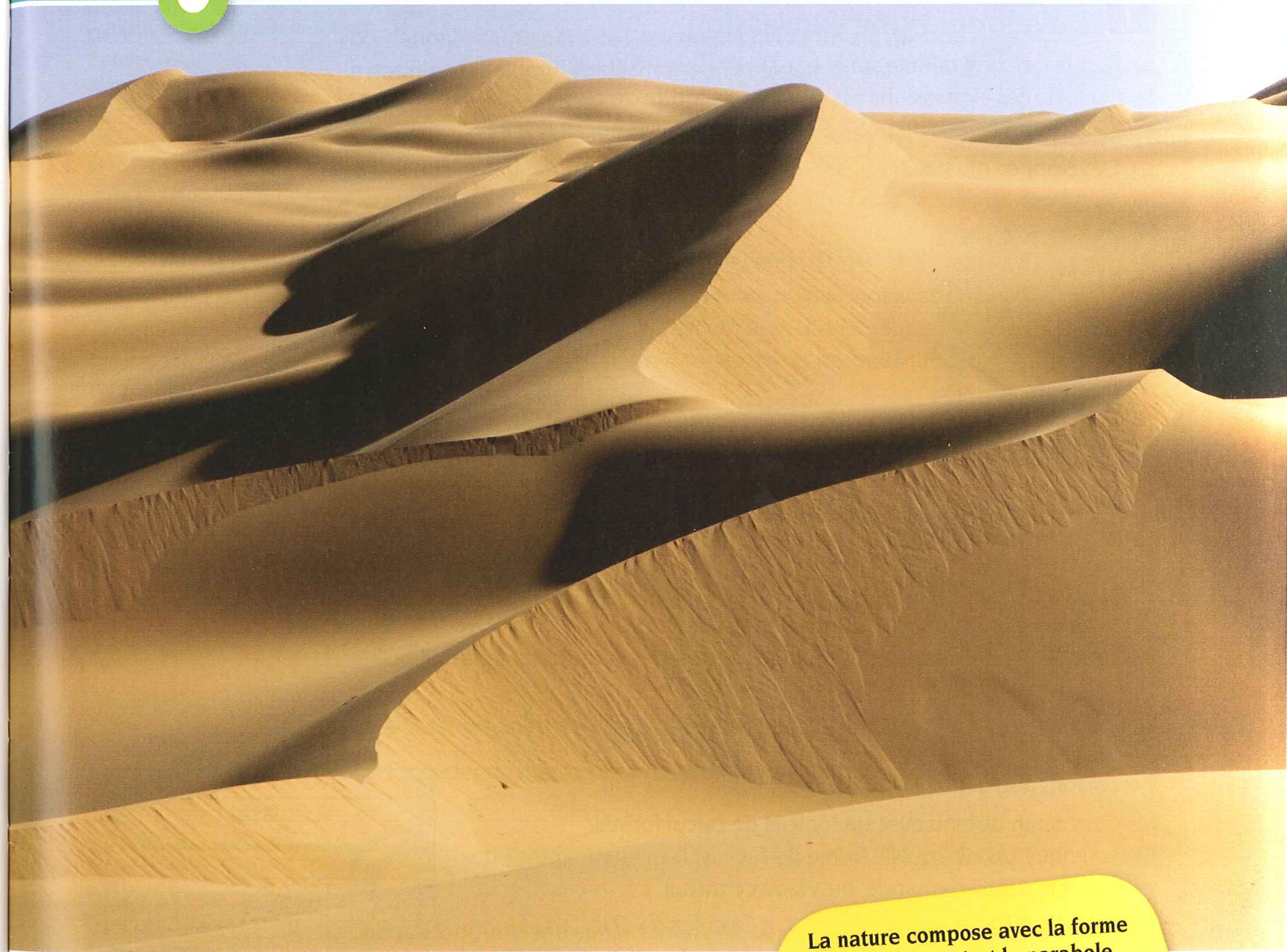
Chapitre

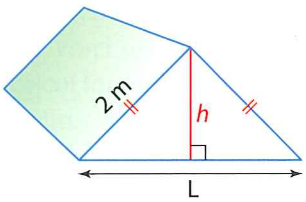
1 Second degré et problèmes



La nature compose avec la forme géométrique qu'est la parabole. Ici, une dune de sable.

Énigme ★

Les dimensions sont exprimées en mètres. La largeur L au sol est égale au double de la hauteur h.



➤ ***Quelle est la hauteur de la tente ?***

Énigme ★★

Julie et Paul sont frère et sœur.

➤ ***Déterminer leur âge sachant que :***

- ***Julie est l'aînée ;***
- ***ils ont deux ans de différence ;***
- ***le produit de leur âge est 1 599.***

Vérifier les acquis

Compléments numériques

Travailler en autonomie

1 Développer une expression

Formulaire p. 247, thème 6

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+5)^2 + 6$.
Laquelle de ces expressions est une autre écriture de $f(x)$?

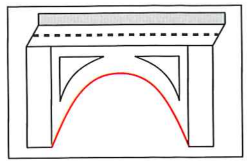
(A) $2x^2 + 56$ **(B)** $2x^2 + 10x + 31$ **(C)** $2x^2 + 31$ **(D)** $2x^2 + 20x + 56$

b) Développer $g(x) = 2(x-3)^2 + 7$.

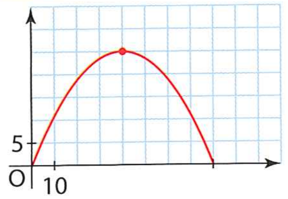
2 Reconnaître graphiquement une parabole

Formulaire p. 252, thème 12

Le dessous d'un pont a la forme d'un arc de parabole. Il est représenté graphiquement dans le repère orthogonal ci-contre (*unités :* 10 m en abscisses et 5 m en ordonnées).



Dessin du pont



Représentation graphique

a) Quelle est la hauteur de ce pont ?

b) Quelle est la largeur de ce pont ?

c) Cet arc de parabole représente une fonction f définie sur $[0\,;80]$. Laquelle de ces expressions est celle de $f(x)$?

(A) $f(x) = -80(x-40)^2 + 25$

(B) $f(x) = -\frac{1}{64}(x-40)^2 + 25$

(C) $f(x) = -20x^2 + 1\,600x - 31\,975$

3 Utiliser la forme la mieux adaptée

Formulaire p. 252, thème 12

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.
Voici un écran obtenu avec un logiciel de calcul formel.
Dans chaque cas, dire quelle forme de $f(x)$ est la mieux adaptée pour effectuer le travail demandé, puis faire ce travail.

```
1 factoriser(1/2*x^2+2x-6)
  (x-2)·(x+6)
  -----------
       2
2 forme_canonique(1/2*x^2+2x-6)
  (x+2)^2
  ------- -8
     2
```

a) Calculer $f(0)$. **b)** Calculer $f(-2)$.

c) Trouver le minimum de f. **d)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

e) Résoudre l'équation $f(x) = 10$. **f)** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) \geqslant -8$.

4 Utiliser le signe d'un carré

Formulaire p. 250, thème 11

Dans chaque cas, étudier le signe de l'expression selon les valeurs de x.

a) $x^2 + 5$ **b)** $-2x^2 - 1$ **c)** $(x-3)^2$ **d)** $-2[(x-5)^2 + 3]$

5 Étudier le signe d'un produit

Formulaire p. 248, thème 8

1. a) Utiliser le tableau ci-contre pour étudier le signe du produit $(x-1)(x+3)$ selon les valeurs de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -3	1	$+\infty$
Signe de $x-1$			
Signe de $x+3$			
Signe de $(x-1)(x+3)$			

b) En déduire les solutions de l'inéquation :
$$(x-1)(x+3) \geqslant 0$$

2. a) De la même façon, étudier le signe de :
$$(1-2x)(x+5)$$

b) En déduire les solutions de l'inéquation $(1-2x)(x+5) > 0$.

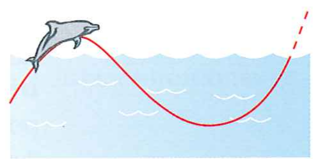
Vérifier les réponses p. 260

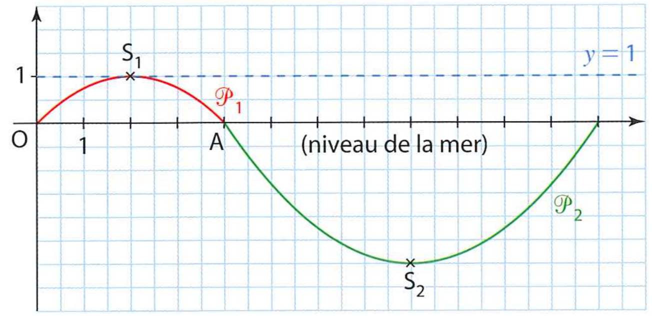
Activités d'approche

Objectif
Utiliser la forme canonique pour trouver l'équation d'une parabole.

1 Déterminer l'équation d'une parabole

Un dauphin saute hors de l'eau en décrivant un arc de parabole et replonge en décrivant un autre arc de parabole.
On a représenté la trajectoire du dauphin dans le repère orthonormé ci-dessous. L'unité est le mètre.





On se propose de déterminer les équations des arcs de parabole $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

1 On sait qu'une équation de la parabole $\mathcal{P}_1$ est de la forme :
$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{où } a, \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des nombres réels fixés.}$$

a) Expliquer graphiquement pourquoi on peut penser que $\mathcal{P}_1$ a pour équation :
$$y = a(x-2)^2 + 1$$

b) Utiliser un point de $\mathcal{P}_1$ pour déterminer a.

2 Procéder de même pour déterminer une équation de $\mathcal{P}_2$.

Objectif
Utiliser la forme du second degré la plus adaptée pour répondre à des questions.

2 Étudier un bénéfice

Chaque jour, une entreprise fabrique x objets avec x compris entre 0 et 50.
Le coût total de production des x objets est donné en euros par :
$$C(x) = 3x^2 - 100x + 900$$
Un objet est vendu au prix de 20 €.

On se propose d'utiliser la forme la plus adaptée du bénéfice B(x) pour déterminer des conditions de rentabilité, la rentabilité maximale…

1 a) Quelle est la recette R(x), exprimée en euros pour x objets vendus ?

b) En déduire le bénéfice B(x), exprimé en euros, réalisé pour x objets produits et vendus.

2 Voici un écran obtenu avec un logiciel de calcul formel.

```
1 factoriser(-3x^2+120x-900)
  -3·(x-30)·(x-10)
2 forme_canonique(-3x^2+120x-900)
  -3·(x-20)^2 +300
```

Utiliser la forme la plus adaptée du bénéfice B(x) afin de répondre aux questions suivantes.

a) Quel est le bénéfice maximal que l'on peut espérer ? Pour quelle production est-il atteint ?

b) Pour quelles productions le bénéfice est-il nul ?

c) Pour quelles productions l'activité est-elle rentable ?

Note
L'activité est dite rentable lorsque le bénéfice est positif.

Différentes formes d'une fonction polynôme de degré 2

DÉFINITION Dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme (ou trinôme)** de degré 2 signifie qu'il existe des nombres réels a ($a \neq 0$), b et c tels que, pour tout nombre réel x : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Il s'agit de **la forme développée** de $f(x)$.

1 Forme canonique

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
f admet une écriture, dite **forme canonique,** telle que pour tout nombre réel x :

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta} \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

VÉRIFICATION

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

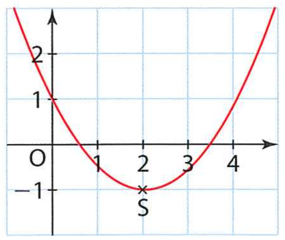
$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = ax^2 + bx + \frac{a\cancel{b^2}}{\cancel{4a^2}} - \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a}} + c = f(x)$$

PROPRIÉTÉ f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Dans un repère, la **parabole représentative** de la fonction f admet pour sommet le point S de coordonnées $(\alpha\,;\beta)$.

EXEMPLE
$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1 \qquad a = 0{,}5\,;\ b = -2\,;\ c = 1$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$ et $\beta = f(2) = 0{,}5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = -1$

Donc la forme canonique de f est $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 1$.
La parabole représentative de f dans un repère a pour sommet le point $S(2\,;-1)$.



2 Forme factorisée

D'après 1, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

DÉFINITION Le **discriminant** de f est le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Note
Lorsque $\Delta = 0$,
on obtient :
$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

PROPRIÉTÉ f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Si $\Delta \geqslant 0$, alors $f(x)$ admet pour **forme factorisée** :

$$\boldsymbol{f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}$$

DÉMONSTRATION

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \text{ car } \Delta \geqslant 0$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Exercice résolu 1 Utiliser la forme adéquate pour traiter un problème

Voir aussi exercices 24 et 27 page 25

Énoncé
On modélise la trajectoire d'une fusée de feu d'artifice par un arc de parabole. On note $f(x)$ la hauteur (en mètres) de la fusée en fonction de la distance horizontale x (en mètres) qu'elle a parcourue. Ainsi :

$$f(x) = -12x^2 + 24x + \frac{27}{4}$$

1. Écrire la forme factorisée et la forme canonique du polynôme f à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
2. Choisir la forme adéquate pour répondre aux questions suivantes.
a) Quelle est la hauteur du promontoire d'où est lancée la fusée ?
b) Quelle hauteur maximale la fusée atteint-elle ?
c) Quelle distance horizontale a-t-elle parcourue lorsqu'elle touche le sol ?
3. Représenter, dans un repère orthogonal, la trajectoire de la fusée (*unités graphiques :* 1,5 cm pour 1 m en abscisses et 0,5 cm pour 5 m en ordonnées).

Solution
1.

```
1 factoriser(-12x^2+24x+27/4)
     -3·(4·x-9)·(4·x+1)
     ------------------
             4
2 forme_canonique(-12x^2+24x+27/4)
     -12·(x-1)^2 + 75/4
```

Commentaire
Avec le logiciel de calcul formel Xcas :
- l'instruction factoriser (…) donne la forme factorisée ;
- l'instruction forme_canonique (…) donne la forme canonique.

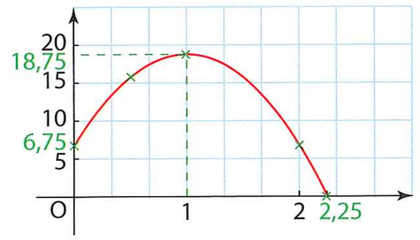
2. a) On utilise la forme développée :
$$f(x) = -12x^2 + 24x + \frac{27}{4}$$
La hauteur du promontoire d'où est lancée la fusée est :
$$f(0) = -12 \times 0^2 + 24 \times 0 + \frac{27}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$
La fusée a été lancée de 6,75 m de haut.
b) On utilise la forme canonique :
$$f(x) = -12(x-1)^2 + \frac{75}{4}$$
Pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant \frac{75}{4}$, soit $f(x) \leqslant 18{,}75$.
Donc la hauteur maximale atteinte par la fusée est 18,75 m.

Commentaire
Cette hauteur maximale est atteinte $\alpha = 1$ m après le décollage.

c) On utilise la forme factorisée :
$$f(x) = -\frac{3}{4}(4x-9)(4x+1)$$
$f(x) = 0$ si, et seulement si, $4x - 9 = 0$ ou $4x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{9}{4}$ ou $x = -\frac{1}{4}$.
Or, la distance horizontale cherchée est un nombre positif, donc la fusée retombe au sol après avoir parcouru $\frac{9}{4}$ m, c'est-à-dire 2,25 m.

3. Pour représenter cette trajectoire, on utilise les informations trouvées en **2.** (en vert dans le tableau ci-dessous) et on complète par quelques valeurs :

x	0	1	2,25	0,5	2
$f(x)$	6,75	18,75	0	15,75	6,75



Équations et inéquations du second degré

1 Équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

- **1^er^ cas : $\Delta > 0$**

L'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $a\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$.

Cette équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **2^e^ cas : $\Delta = 0$**

L'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Cette équation a pour seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$.

- **3^e^ cas : $\Delta < 0$**

L'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$.

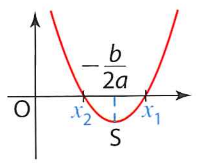
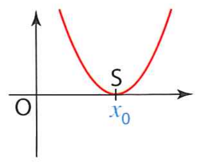
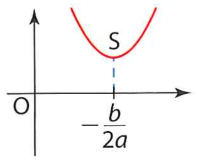
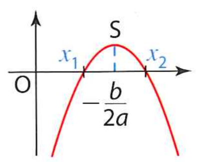
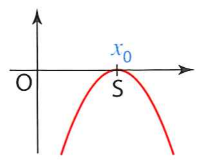
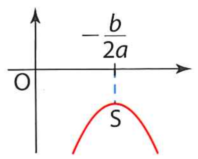
Cette équation n'a pas de solution car $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Note

Lorsque $\Delta = 0$, l'unique solution x_0 est appelée racine double de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	**Deux solutions distinctes** $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	**Une seule solution** $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$	**Pas de solution**
Forme factorisée de $ax^2 + bx + c$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation à mémoriser

2 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Position de la parabole représentant f par rapport à l'axe des abscisses	$a > 0$			
	$a < 0$			
Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$		On suppose $x_1 < x_2$ x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de a	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a | 0 | signe de a	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: signe de a

Pour mémoriser plus facilement le signe du trinôme, on peut retenir que $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

Exercice résolu 1 — Conjecturer avec la calculatrice

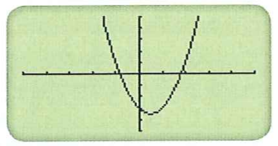
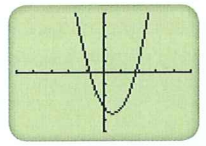
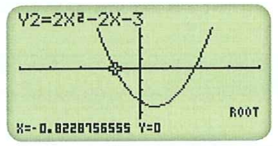
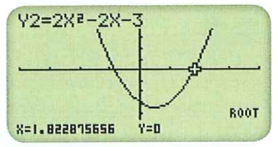
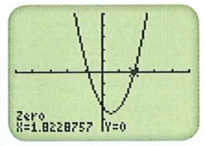
Voir aussi l'exercice 36 page 26

Énoncé

f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$.

Utiliser la calculatrice pour conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner des valeurs approchées.

Solution

Commentaires	Casio	TI
• On trace la courbe de f.		
• On affiche les racines.	**F5** (G-Solv) **F1** (ROOT)  ▶ pour afficher la 2^e^ solution. 	**2nd** **CALC** ▼ (2 : zéro) **ENTER** Left Bound : déplacer le curseur à gauche de la solution, puis **ENTER** Right Bound : déplacer le curseur à droite de la solution, puis **ENTER** Taper **ENTER**  On recommence ces étapes pour afficher la 2^e^ solution.

Il semble que l'équation $f(x) = 0$ ait deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 \approx -0{,}82$ et $x_2 \approx 1{,}82$.

Exercice résolu 2 — Étudier un signe

Voir aussi l'exercice 37 page 26

Énoncé

f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$.

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. **b)** Étudier le signe de $f(x)$.

Solution

a) $a = 2$, $b = -2$, $c = -3$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 28$.

$\Delta > 0$, donc l'équation $2x^2 - 2x - 3 = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{2-\sqrt{4\times 7}}{2\times 2} = \frac{2-2\sqrt{7}}{2\times 2} = \frac{\cancel{2}\times(1-\sqrt{7})}{\cancel{2}\times 2} = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{2+\sqrt{4\times 7}}{2\times 2} = \frac{2+2\sqrt{7}}{2\times 2} = \frac{\cancel{2}\times(1+\sqrt{7})}{\cancel{2}\times 2} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

b) On obtient le tableau de signe de $f(x)$ suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Commentaire

Ici $a = 2$, donc $f(x)$ est du signe de a, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines x_1 et x_2.

Remarque : ce tableau est cohérent avec la position de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses sur l'écran obtenu à l'exercice résolu 1.

Accompagnement personnalisé

Pour comprendre

A Mathématiser, aider à évoquer des connaissances

Situation

La trajectoire d'un plongeur archéologue chargé d'étudier des vestiges est modélisée par la parabole représentant la fonction p définie par :

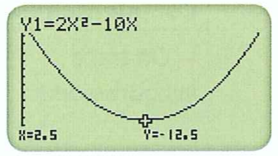
$$p(t) = 2t^2 - 10t$$

où t désigne le temps en minutes et $p(t)$ la profondeur en mètres.

On souhaite connaître :
- la profondeur atteinte par le plongeur ;
- le temps de descente du plongeur ;
- la durée totale de plongée.

Le travail de Louane

- Louane repère dans le texte les mots importants pour modéliser la situation.
- Elle trace à l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction p.

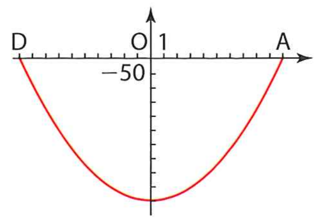


Elle utilise le menu G-Solv (Casio) ou Calc (TI).
- p est une fonction polynôme du second degré, Louane écrit $a = \ldots,\quad b = \ldots,\quad c = \ldots$

1 Poursuivre le travail de Louane en répondant aux questions posées dans la colonne de gauche.

2 Un entraînement d'athlétisme a lieu sur un circuit dont l'un des virages a une forme parabolique qui a pour équation $y = 5x^2 - 500$ dans le repère ci-dessous.

Le point D marque le départ, le point A marque l'arrivée (*unité* : le mètre). Un observateur est placé au point O, milieu du segment [AD] et origine du repère choisi.



a) Quelle est la distance séparant l'observateur du point de départ ?

b) Quelle distance sépare un spectateur placé au départ d'un spectateur placé à l'arrivée ?

c) Quelle distance maximale séparera un coureur de la ligne [AD] où se placent tous les spectateurs ?

3 Youssef s'entraîne au tir sur cible mobile. Il a placé sur une falaise à 90 m au-dessus de la mer, un appareil qui lance des pigeons d'argile. La hauteur $h(t)$ (en mètres) du pigeon d'argile par rapport au niveau de la mer t secondes après son lancement est donnée par :

$$h(t) = -5t^2 + 15t + 90$$

Aider Youssef à calculer :

a) la hauteur maximale du pigeon d'argile ;

b) l'instant où cette hauteur est atteinte ;

c) la durée du vol du pigeon d'argile.

Conseils

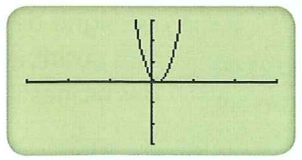
Identifier les coefficients a, b, c soigneusement avant de calculer α et β, et de les écrire sur le schéma.

B Tirer profit d'une erreur

f est la fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = 10x^2 - 3x + 0{,}2$.

Un professeur a demandé à ses élèves de déterminer le signe de $f(x)$ par lecture graphique.

Voici l'écran de calculatrice obtenu par Hugo, sa conclusion et les remarques du professeur.



Par lecture graphique on déduit que $f(x) \geqslant 0$ pour tout nombre réel x.

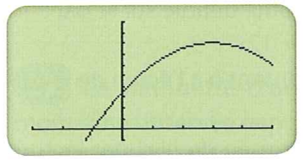
Non, penser à bien choisir la fenêtre graphique.

4 **a)** Dans le cas de la fonction f de la fiche précédente, préciser les valeurs de α et β.

b) Choisir alors une fenêtre graphique adaptée afin de corriger l'erreur de Hugo.

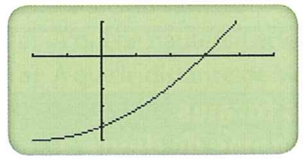
5 Voici les écrans de calculatrice et les conclusions proposées par un élève en réponse aux questions indiquées.

Question : Résoudre l'équation $-x^2 + 6x + 7 = 0$.



Par lecture graphique je trouve que : $-x^2 + 6x + 7 = 0$ pour $x = -1$.

Question : Résoudre l'inéquation $2x^2 + 8x - 42 > 0$.



Par lecture graphique je trouve que : $2x^2 + 8x - 42 > 0$ pour $x > 3$.

a) Expliquer comment déceler les erreurs.

b) Répondre à ces questions par le calcul.

Conseils

Lorsqu'on utilise la calculatrice pour tracer une courbe, il faut veiller à choisir convenablement la fenêtre graphique.

C Élaborer une fiche méthode

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

- **1er cas :** $b = 0$ ou $c = 0$, on peut éviter de calculer Δ.

Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3
$x^2 + x = 0$ équivaut à $x(\ldots) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou … Les solutions sont …	$x^2 - 4 = 0$ équivaut à $(x - \ldots)(x + \ldots) = 0$ c'est-à-dire … Les solutions sont …	$x^2 + 5 = 0$ équivaut à $x^2 = \ldots$ Cette équation …

- **2e cas :** $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on calcule $\Delta = \ldots$

Si $\Delta > 0$ il y a … solutions qui sont …
Si $\Delta = 0$ il y a … solution qui est …
Si $\Delta < 0$ il y a …

6 Reproduire la fiche ci-dessus en complétant les pointillés.

7 Un cascadeur plonge d'une falaise de 25 m de hauteur. Son altitude (en mètres par rapport au niveau de la mer) durant sa chute est donnée par :

$$f(t) = 25 - \frac{1}{2}t^2$$

où t est le temps écoulé depuis le saut, exprimé en secondes.

À quel instant le cascadeur atteindra-t-il la mer ?

8 Résoudre les équations suivantes :

a) $2x - x^2 + 3 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $4x^2 + 9 - 12x = 0$

d) $16 - 4x^2 = 0$

9 Résoudre l'équation $4x^2 - 20x + 25 = 0$:

a) en calculant le discriminant ;

b) sans calculer le discriminant.

10 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}1x + 1{,}2$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

b) Démontrer cette conjecture par un calcul.

Conseils

Commencer par bien ordonner les termes x^2, x et le terme constant pour identifier correctement a, b, c.

Vérifier les réponses p. 264

Exercices de base

Pour créer des automatismes

Différentes formes d'une fonction polynôme de degré 2

11 Développer et ordonner les expressions suivantes.

a) $(x-2)(x+3)$ b) $-3(x+1)(x-2)$

c) $2(x+1)^2-5$ d) $3[(x-1)^2+2]$

12 Pour chacun des trinômes suivants, calculer α et β. En déduire la forme canonique.

a) $P(x) = 2x^2 - 12x + 24$

b) $Q(x) = 3x^2 + 7x - 1$

13 g est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + x + 3$$

a) Afficher la courbe représentant g à l'écran de la calculatrice.

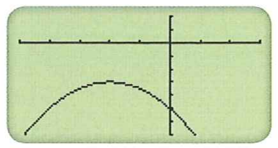
b) Conjecturer la forme canonique de $g(x)$ par lecture graphique. Vérifier ce résultat par le calcul.

14 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}5(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la forme développée et la forme canonique de f.

15 En observant l'écran de sa calculatrice paramétrée avec un pas de 1, Marie affirme que la fonction f représentée a pour forme canonique :



$$f(x) = -3 - \frac{1}{2}(x-2)^2$$

a) Corriger l'erreur de Marie.

b) Écrire la forme développée de $f(x)$.

16 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 12x^2 - 19x - 21$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la forme canonique et la forme factorisée de f.

17 Calculer le discriminant des trinômes suivants et préciser si le trinôme admet une forme factorisée ou non.

a) $x^2 + 5x - 6$ b) $3x^2 - 1$

c) $7x^2 + 4x$ d) $-x + 3x^2 + 5$

Aide : Attention à l'ordre des termes. Identifier a, b, c soigneusement avant de calculer Δ.

18 a) Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = -4x^2 + 36x - 56$ $B(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2 - \frac{5}{3}x$

b) Vérifier avec un logiciel de calcul formel.

19 h est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

a) Afficher la courbe représentant h à l'écran de la calculatrice.

b) Conjecturer la forme factorisée de $h(x)$ par lecture graphique. Vérifier le résultat par le calcul.

20 f est une fonction polynôme du second degré, de discriminant Δ. Tracer, lorsque cela est possible, une courbe pouvant représenter la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\Delta > 0$

b) $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\Delta < 0$

c) $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\Delta = 0$

Aide : Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ lorsque $\Delta > 0$? Comment s'interprète graphiquement une telle solution ?

21 Un professeur a demandé à ses élèves les différentes formes de la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Antoine utilise un logiciel de calcul formel et obtient :

```
1 factoriser(3x^2-2x+1)
      3*x^2 - 2*x + 1                 M
2 forme_canonique(3x^2-2x+1)
      3*(x + 1/(-3))^2 + 2/3          M
```

a) Est-ce que $3x^2 - 2x + 1$ est une forme factorisée ?

b) Pourquoi le logiciel n'affiche pas de forme factorisée ?

22 Un professeur a demandé à ses élèves les différentes formes de la fonction définie par :

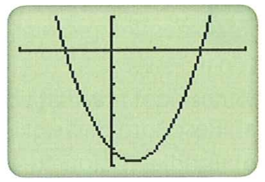
$$f(x) = 0{,}25x^2 - 1{,}5x + 2{,}25$$

Dorian utilise un logiciel de calcul formel et obtient :

```
1 factoriser(0.25x^2-1.5x+2.25)
      0.25*(x-3.0)*(x-3.0)            M
2 forme_canonique(0.25x^2-1.5x+2.25)
      0.25*(x-3.0)^2                  M
```

Expliquer pourquoi les deux résultats obtenus sont identiques.

23 Lukas montre à Fatou l'écran de sa calculatrice. Le pas choisi sur les deux axes est 1.



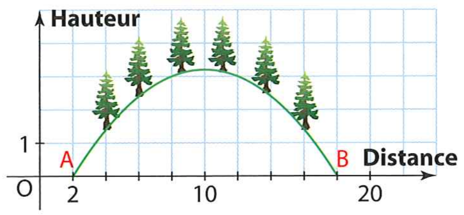
Fatou affirme que la fonction f représentée est définie par $f(x) = 2(x+1)(x-2)$.

a) Corriger l'erreur de Fatou.

b) Retrouver la forme développée tapée par Lukas.

Aide : Lire graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et les coordonnées d'un autre point.

24 La silhouette d'une montagne observée depuis la vallée a la forme d'un arc de parabole représentant une fonction f dans le repère ci-dessous :



Les unités graphiques sont en centaines de mètres. Les expressions de f sont indiquées ci-dessous.

Forme développée	$f(x) = -0{,}05x^2 + x - 1{,}8$
Forme canonique	$f(x) = 3{,}2 - 0{,}05(x-10)^2$
Forme factorisée	$f(x) = -0{,}05(x-2)(x-18)$

Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

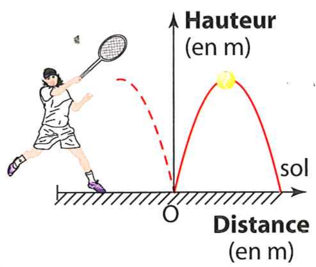
a) Quel est le dénivelé entre la vallée et le sommet ?

b) Quelle est la distance AB ?

c) Quelle distance, au niveau de la vallée, sépare le pied de la montagne du sommet ?

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 19.

25 Une balle de tennis rebondit devant Maxime sur le sol en suivant une trajectoire parabolique représentant une fonction f.



Les trois expressions de f sont indiquées ci-dessous.

Forme développée	$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$
Forme canonique	$f(x) = -2(x-2)^2 + 2$
Forme factorisée	$f(x) = -2(x-1)(x-3)$

Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

a) À quelle hauteur cette balle rebondit-elle ?

b) À quelle distance de Maxime cette balle touche-t-elle le sol ?

26 f est une fonction polynôme du second degré dont les trois expressions sont indiquées ci-dessous.

Forme développée	$f(x) = 3x^2 + 3x - 60$
Forme canonique	$f(x) = 3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{4}$
Forme factorisée	$f(x) = 3(x-4)(x+5)$

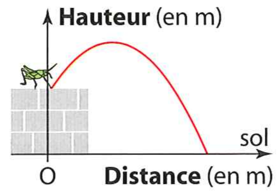
Choisir la forme appropriée pour justifier les affirmations suivantes.

a) Pour tout nombre réel x, $f(x) \geqslant -60{,}75$.

b) Dans un repère, la courbe $\mathscr{C}$ de f coupe l'axe des abscisses en -5 et en 4.

c) La courbe $\mathscr{C}$ de f coupe l'axe des ordonnées en -60.

27 Une sauterelle saute d'un mur avant de se poser sur le sol. On admet que sa trajectoire est un arc de parabole représentant une fonction f dont les trois formes sont données ci-dessous.



Forme développée	$f(x) = -x^2 + x + 2$
Forme canonique	$f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$
Forme factorisée	$f(x) = -(x+1)(x-2)$

Choisir la forme appropriée pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la hauteur du mur ?

b) À quelle hauteur maximale a-t-elle sauté ?

c) À quelle distance du mur est-elle retombée ?

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 19.

28 Le bénéfice d'une entreprise pour x centaines d'objets produits est modélisé par :

$$B(x) = 2x^2 + 3x - 27$$

exprimé en centaines d'euros

Un logiciel de calcul formel donne :

```
1 factoriser(2x^2+3x-27)
      (x-3)*(2*x+9)                   M
2 forme_canonique(2x^2+3x-27)
      2*(x + 3/4)^2 + -225/8          M
```

a) Étudier le signe de $B(x)$.

b) À partir de quelle production l'activité est-elle rentable ?

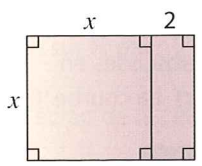
Équations et inéquations du second degré

29 On note $P(x) = 3x^2 + x - 2$.
a) Calculer le discriminant de P.
b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

30 On note $P(x) = 4x^2 - 28x + 49$.
a) Calculer le discriminant de P.
b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

31 On note $P(x) = -x^2 + 6x - 14$.
a) Calculer le discriminant de P.
b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

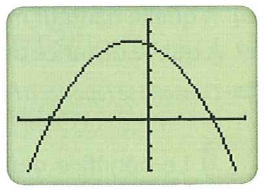
32 Un menuisier dispose d'une planche de 15 m².
Il doit construire un panneau selon le schéma ci-contre.
Quelle dimension x doit-il choisir pour utiliser tout le bois ?



33 f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 0{,}5x - 0{,}375$$
Utiliser la calculatrice pour conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner des valeurs approchées.

34 Résoudre les équations suivantes, puis vérifier à l'aide de la calculatrice.
a) $3x^2 - 17x - 6 = 0$ **b)** $8x^2 + \dfrac{33}{2} + 4x = 0$
c) $\sqrt{5}\,x^2 - 10x + 5\sqrt{5} = 0$

35 Sur l'écran de calculatrice ci-contre, paramétrée avec un pas de 1, on a représenté une fonction polynôme f de degré 2.



a) Conjecturer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
b) Conjecturer les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

36 f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x^2 + 3x + 1$$
Utiliser la calculatrice pour conjecturer :
a) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner des valeurs approchées ;
b) le signe de $f(x)$.

▶ *Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 21.*

37 f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x^2 + 3x + 1$$
a) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.
b) Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

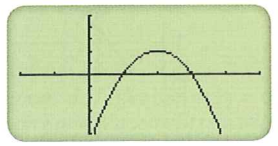
▶ *Conseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 21.*

38 Pour chacune des inéquations suivantes, conjecturer l'ensemble des solutions à l'aide de la calculatrice, puis démontrer le résultat par le calcul.
a) $2x^2 + 87x + 10 \geqslant 0$ **b)** $3x^2 - 12x + 13 \geqslant 0$
c) $3x^2 - 24x + 48 < 0$

39 Étudier le signe des polynômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ par :
a) $G(x) = -3x^2 + 6x - 18$
b) $H(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x - 4$

▶ *Aide : Ne pas oublier de ranger les valeurs qui annulent le polynôme dans l'ordre croissant.*

40 f est la fonction polynôme de degré 2 représentée sur l'écran de calculatrice ci-contre. Le pas choisi sur les deux axes est 1.



a) Lire graphiquement le tableau de signe de $f(x)$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

41 Associer chaque tableau de signes à la courbe qui lui correspond.

Tableau 1

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Tableau 2

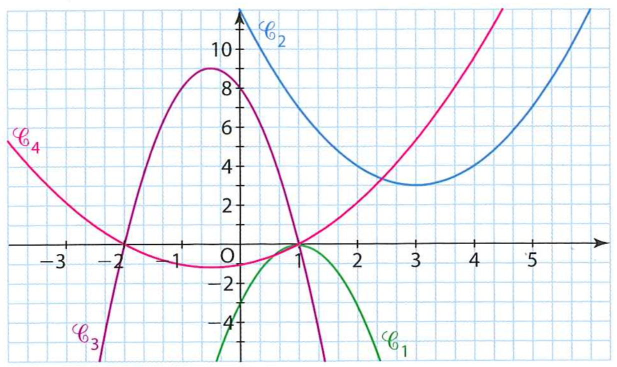
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		−	0	−	

Tableau 3

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$h(x)$		−	0	+	0	−	

Tableau 4

x	$-\infty$		$+\infty$
$k(x)$		+	



42 f est une fonction polynôme de degré 2, possédant le signe décrit ci-dessous.
Dans chaque cas, tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

a)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

b)

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		−	

43 Pour rédiger
Lire ci-dessous l'énoncé et la solution d'un élève.

Résoudre l'inéquation $2x^2 + 3x - 1 < 0$
$a = 2$ $b = 3$ $c = -1$
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17$
donc
$x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2+3x-1$		+	0	−	0	+	

Faire une phrase pour introduire ces calculs. Quelles sont les solutions ?

Rédiger cette solution en tenant compte des remarques du correcteur.

44 Une entreprise fabrique x dizaines d'objets par jour. Son bénéfice, exprimé en centaines d'euros, pour x dizaines d'objets fabriqués est :
$$B(x) = -2x^2 + 12x - 10$$
pour $x \in [0\,;10]$
a) Établir le tableau de signes de la fonction B sur $[0\,;10]$.
b) En déduire la production pour laquelle l'activité de l'entreprise est rentable, c'est-à-dire pour laquelle le bénéfice est positif.

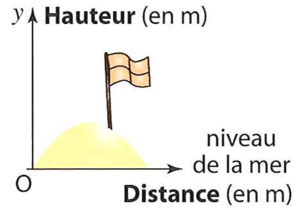
45 Résoudre les inéquations suivantes.
a) $6x^2 - 37x + 6 \geqslant 0$ **b)** $9x^2 - 12x + 4 > 0$
c) $-x^2 + 3\sqrt{3}\,x - 6 \leqslant 0$ **d)** $x^2 + \dfrac{13}{16} - \dfrac{1}{2}x < 0$

46 Un logiciel de calcul formel donne :

```
1 f(x):=2x^2+5x-3
      x -> 2*x^2+5*x-3
2 forme_canonique(f(x))
      2*(x+5/4)^2+(-49)/8
3 factoriser(f(x))
      (x+3)*(2*x-1)
```

Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

47 Durant l'été, des enfants se sont lancés le défi d'aller planter un drapeau sur une dune à au moins 200 m au-dessus du niveau de la mer.



Dans le repère ci-contre, le profil de la dune est donné par l'équation :
$$y = -\frac{1}{1\,600}x^2 + x$$
a) Expliquer pourquoi l'objectif est atteint en plantant le drapeau en un point d'abscisse x qui vérifie :
$$-\frac{1}{1\,600}x^2 + x - 200 \geqslant 0$$
b) Déterminer les abscisses des points où le drapeau peut être planté.

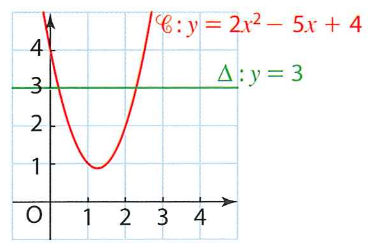
48 Chaque jour, une entreprise fabrique x objets, avec x compris entre 0 et 50.
Le coût de production de x objets est donné en euros par :
$$C(x) = 280 - 14x$$
Le revenu de x objets vendus est donné en euros par :
$$R(x) = 2x - 0{,}1x^2$$
a) Quel est le bénéfice $B(x)$ obtenu pour x objets produits et vendus ?
b) Pour quelle production l'activité est-elle rentable ?

49 f est la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}6x + 1{,}9$$
Le professeur a demandé à ses élèves de résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
Samy commence la résolution en calculant le discriminant Δ.
Laëtitia l'arrête : « C'est inutile, regarde ce que l'on obtient avec le logiciel ».

```
1 forme_canonique(0.1x^2-0.6x+1.9)
      0.1*(x-3)^2+1.0
```

Expliquer le raisonnement de Laëtitia et répondre à la question du professeur.

50 Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4$$
Étudier, suivant les valeurs de x, les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.



Travaux pratiques

Pour expérimenter et modéliser

51 B2i L3-4 Transport d'œuvres d'art

OBJECTIF Utiliser deux stratégies différentes pour conjecturer le signe d'une expression.

Une compagnie est spécialisée dans le transport d'œuvres d'art.
Le coût $C(x)$ du transport, en centaines d'euros, dépend de la valeur x de l'œuvre, en centaines d'euros.
Pour $x \geqslant 4$, on a :

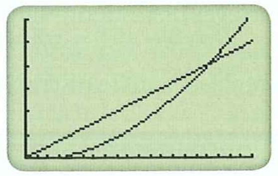
$$C(x) = 0{,}016x^2 - 0{,}144$$

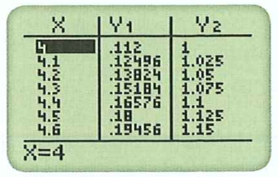
(La compagnie ne transporte que des œuvres estimées à 400 € ou davantage.)
La compagnie applique un tarif forfaitaire lorsque le coût du transport dépasse le quart de la valeur de l'œuvre, c'est-à-dire lorsque $C(x) > \frac{1}{4}x$.
On se propose de savoir à partir de quelle valeur une œuvre d'art bénéficiera de ce tarif forfaitaire.

1. Conjecture

Jonathan et Lucile ont amorcé les démarches suivantes, jugées correctes par leur professeur.

- **Démarche de Lucile**





- **Démarche de Jonathan**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Prix de l'œuvre : x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
2	Coût du transport : $C(x)$	0,11	0,12	0,14	0,15	0,17	0,18	0,19	0,21	0,22	0,24	0,26
3	(1/4)*x	1	1,03	1,05	1,08	1,1	1,13	1,15	1,18	1,2	1,23	1,25

Reprendre chacune des deux démarches et émettre une conjecture sur la valeur à partir de laquelle une œuvre bénéficiera du tarif forfaitaire.

2. Démonstration

a) Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'inéquation :

$$0{,}016x^2 - 0{,}25x - 0{,}144 > 0$$

b) Calculer le discriminant de $0{,}016x^2 - 0{,}25x - 0{,}14$ et dresser le tableau de signes de ce polynôme de degré 2.

c) Conclure.

52 B2i L3-4 L3-5 Prix du carburant

OBJECTIF Utiliser la forme appropriée d'un polynôme du second degré pour déterminer un maximum.

Un pompiste revend le litre d'essence au prix de 1,20 €, alors que le prix d'achat est pour lui de 0,85 €. Le pompiste sait alors qu'il peut compter sur une vente journalière de 1 000 litres. Mais il sait aussi qu'à chaque baisse qu'il consent d'un centime d'euro pour le prix de vente du litre, il vend 100 litres supplémentaires par jour de ce carburant.
On se propose de déterminer le prix de vente du carburant qui garantit un bénéfice maximal.
On considère que les baisses de prix éventuellement consenties se font centime par centime.

1. Utilisation d'un tableur

a) Faire quelques essais à la main.

b) Réaliser la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Nombre *k* de baisses de 1 centime d'euro	Prix de vente (en euros)	Bénéfice sur 1 L	Quantité vendue (en litres)	Bénéfice total (en euros)
2	0	1,2	0,35		
3	1	1,19	0,34		
4	2	1,18	0,33		
5	3	1,17	0,32		
6	4	1,16	0,31		

c) À l'aide du tableur, représenter graphiquement le bénéfice total en fonction du nombre de baisses.

d) Conjecturer, à partir du tableau ou du graphique, le prix de vente qui garantit un bénéfice maximal.

2. Démonstration

a) Déterminer l'expression de la fonction B, qui, à un nombre k de baisses, associe le bénéfice total.

b) Quelle est la nature de cette fonction ?
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer les autres formes de $B(k)$.

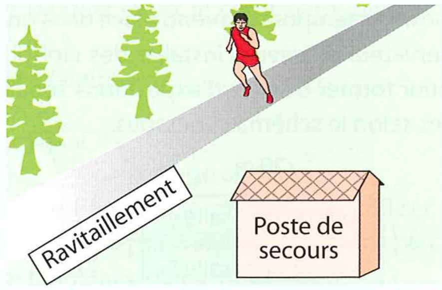
c) Utiliser la forme appropriée pour déterminer :
- la valeur maximale de $B(k)$;
- le réel k correspondant.

d) Quels sont les deux entiers k_1 et k_2 les plus proches de la valeur k déterminée en **c)** ?
Calculer $B(k_1)$ et $B(k_2)$.
En déduire un prix de vente qui garantit un bénéfice maximal.

53 B2i L2-4 Course à pied

OBJECTIF Mettre en équation une situation concrète afin de répondre à une question.

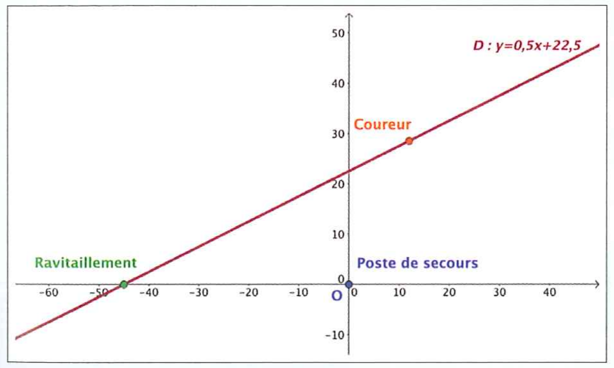
Une course à pied est organisée dans un village de France. Une partie du parcours est schématisée ci-dessous.



Le point de ravitaillement se situe à 45 m du poste de secours.
Un coureur est visible à l'œil nu du poste de secours si la distance qui le sépare du poste est inférieure à 230 m.
On se propose de savoir sur quelle longueur du parcours un coureur sera à portée de vue d'un observateur placé au poste de secours.

1. Conjecturer à l'aide d'un logiciel

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduire le graphique ci-dessous.



b) Placer un point M mobile (symbolisant un coureur) sur la droite D et faire afficher la distance OM.

c) Un coureur placé à moins de 50 m du ravitaillement est-il visible du poste de secours ?

d) Conjecturer une réponse au problème.

2. Démonstration

a) Exprimer la distance OM en fonction de x.

b) Montrer que le problème se ramène à la recherche des solutions de l'inéquation :

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 22{,}5\right)^2 < 230^2$$

c) Résoudre cette inéquation.

d) En déduire la réponse au problème.

54 Jeux de toupies

OBJECTIF Résoudre une équation pour répondre à un problème.

Deux enfants jouent aux toupies sur une planche rectangulaire de 50 cm de large. Leurs toupies se déplacent selon des trajectoires paraboliques. On se propose de déterminer en quel point les trajectoires vont se croiser.
Dans un repère orthonormé d'unité le cm, la trajectoire de la première toupie est modélisée par l'équation $y = -\frac{1}{40}x^2 + x + 40$; celle de la seconde toupie est modélisée par l'équation $y = -0{,}15x^2 + 9x - 75$, pour $0 \leqslant x \leqslant 50$.

1. Conjecturer à la calculatrice

a) Tracer les trajectoires des toupies sur la calculatrice.

b) Conjecturer une réponse au problème.

2. Démonstration

a) Montrer que résoudre le problème revient à résoudre l'équation $0{,}125x^2 - 8x + 115 = 0$ dans $[0 ; 50]$.

b) Résoudre cette équation et conclure.

Algorithmique

55 Algorithmique et équation du second degré

OBJECTIF Utiliser un algorithme pour résoudre une équation du second degré.

a, b et c désignent trois nombres réels fixés avec $a \neq 0$.

a) Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Entrées
Saisir a, b, c
Traitement
D prend la valeur b²–4ac
Afficher D
Si D<0 alors
    | Afficher « Pas de solution »
Sinon
    | X1 prend la valeur …
    | X2 prend la valeur …
    | Afficher X1 et X2
FinSi
Sortie
```

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

c) Écrire cet algorithme sur une calculatrice ou sur un logiciel adapté.

d) Tester son fonctionnement avec les équations suivantes.
- $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
- $3x^2 + x + 4 = 0$

Exercices d'entraînement

Pour développer des compétences

Critiquer, argumenter

56 Retrouver la courbe

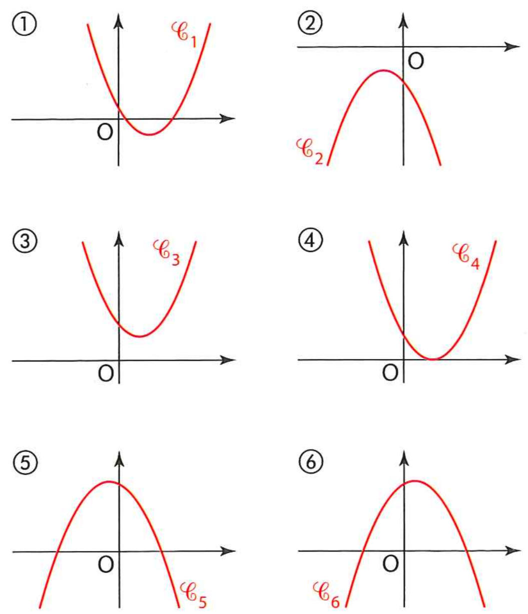
Le plan est muni d'un repère mais les graduations ont été malencontreusement effacées.

Associer chaque polynôme ci-dessous à sa courbe représentative. Argumenter les choix.

$P_1(x) = -x^2 + x + 6$ $\quad P_2(x) = -x^2 - x + 6$

$P_3(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ $\quad P_4(x) = x^2 - 3x + \frac{8}{9}$

$P_5(x) = x^2 - 2x + 3$ $\quad P_6(x) = -x^2 - 2x - 3$

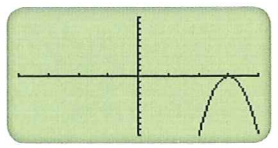


57 Interprétation trop hâtive

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

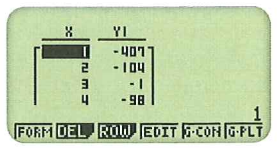
$$f(x) = -100x^2 + 603x - 910$$

a) Étienne a tracé la courbe représentant la fonction f à l'écran de sa calculatrice (voir ci-contre).



Il affirme que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 = 3$.

Son voisin a obtenu, toujours à la calculatrice, le tableau de valeurs ci-contre. Il affirme qu'Étienne a tort.



Expliquer son raisonnement.

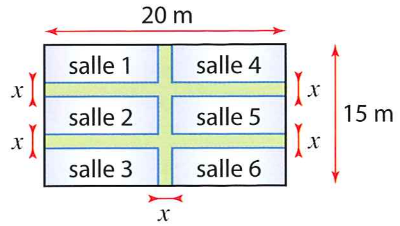
b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par le calcul pour départager les deux élèves.

c) Expliquer ce qui est à l'origine de l'erreur d'Étienne.

Mener des raisonnements

58 Au musée

Une exposition temporaire prend place dans un musée. Le conservateur a prévu d'installer des cloisons amovibles pour former 6 salles d'expositions séparées par des allées selon le schéma ci-dessous.



Déterminer la largeur x des allées de sorte que la surface d'exposition soit égale à 200 m².

59 Recette et coût de production

Une entreprise produit de la pâte à papier. On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $0 \leqslant q \leqslant 60$.

Le coût total de production, en euros, pour la quantité q est :

$$C(q) = q^2 + 632q + 1\,075$$

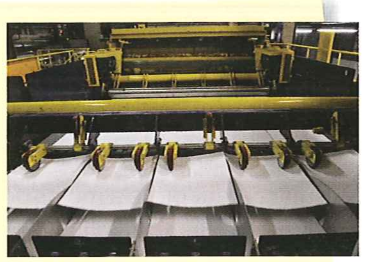
L'entreprise vend sa pâte à papier 700 € la tonne.

a) Déterminer la recette $R(q)$ obtenue pour une masse q de pâte vendue.

b) Déterminer la masse q de pâte à papier que l'entreprise doit produire pour que son activité soit rentable.

Info

Le cours de la pâte à papier ne cesse d'augmenter actuellement, générant des coûts supplémentaires pour la presse écrite.



60 objectif Bac Sécurité routière

La vitesse, en km/h, d'un véhicule dont la distance de freinage est de 110 m est solution de l'équation :

$$0{,}01v^2 - 0{,}025v - 110 = 0$$

a) Résoudre cette équation. Arrondir à l'unité.

b) En déduire la vitesse, en km/h, d'un véhicule dont la distance de freinage est de 110 m.

61 Fréquence cardiaque

La fréquence cardiaque d'une sportive en fonction de la puissance de l'effort est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;340]$ par :

$$f(x) = 0{,}001\,25x^2 + 0{,}025x + 60$$

où la puissance x est exprimée en watt et $f(x)$ est le nombre de battements du cœur par minute.

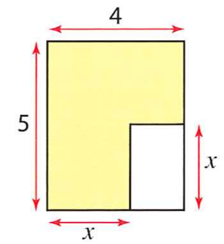
À partir de quel effort le cœur bat-il plus de 120 fois par minute ?

Arrondir à l'unité.

62 objectif Bac Logo stylisé

L'entreprise Prim' Jet se propose de réaliser un logo représentant la lettre P stylisée, dans une pièce métallique rectangulaire d'épaisseur 5 mm.

Sur la figure suivante, la partie colorée représente la zone où le matériau doit être déposé.



Les cotes sont exprimées en cm et $0 \leqslant x \leqslant 4$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie traitée (colorée sur le schéma).

1. Calculer $\mathscr{A}$ pour $x = 1{,}5$.

2. a) Exprimer l'aire du rectangle découpé (blanc sur le schéma) en fonction de x.

b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ est donnée par la relation :

$$\mathscr{A} = x^2 - 4x + 20$$

3. L'entreprise qui a commandé les pièces propose une aire de 17 cm².

Déterminer par le calcul (la ou les) cote(s) x correspondante(s).

Communiquer à l'écrit, à l'oral

63 L'offre et la demande

Une chaîne de magasins de décoration vend un tissu d'ameublement.

x est le prix de vente au mètre, en dizaines d'euros, et $0{,}3 \leqslant x \leqslant 3{,}5$.

L'offre, en dizaines de mètres, est :

$$O(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$$

La demande, en dizaines de mètres, est :

$$D(x) = -x^2 - 2x + 20$$

On se propose de déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix lorsque l'offre est égale à la demande.

Sarah et Cheng ont amorcé les démarches suivantes, jugées correctes par le professeur.

$O(x) = D(x)$ si

$O(x) - D(x) = 0$

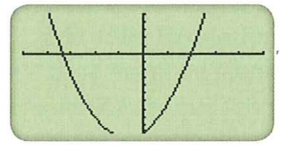
$\frac{1}{2}x^2 + 10 - (-x^2 - 2x + 20) = 0$

$= \frac{3}{2}x^2 + 2x - 10$

résoudre

$\frac{3}{2}x^2 + 2x - 10 = 0$

$\longrightarrow$ calculatrice.

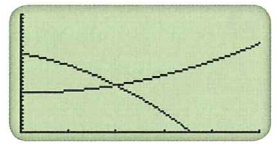


◀ Sarah

▼ Cheng

Je trace les courbes de O et de D.

Je cherche où elles se coupent.



a) Justifier les démarches proposées par Sarah et Cheng.

b) Choisir l'une des démarches pour conjecturer le prix d'équilibre à l'aide de la calculatrice.

c) Confronter les démarches de Sarah et de Cheng, en questionnant les camarades ayant utilisé l'autre démarche.

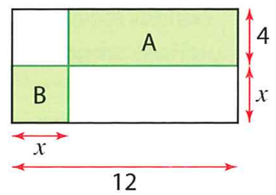
d) Démontrer le résultat par le calcul.

64 En anglais

a) Find an inequality involving m² such that the quadratic equation $2x^2 - mx + 8 = 0$ has no solution.

b) Find the range of values for p such that the equation $2x^2 + 6x + p = 0$ has two distinct solutions.

c) The area of rectangle A is twice the area of rectangle B. Form an equation and solve it to find x.



S'initier à la logique

65 Quantificateur universel

Justifier, pour chacune des affirmations, si elle est vraie ou fausse.

a) f est une fonction polynôme du second degré qui possède le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Affirmation : Tous les nombres dont l'image par f est positive appartiennent à $]-\infty\,;+\infty[$

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -(x-3)^2$$

Affirmation : Pour tout nombre réel x, $g(x) < 0$.

AUTO ÉVALUATION
POUR SE TESTER

Travailler en autonomie

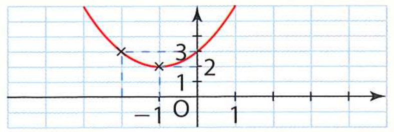
QCM

66 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 L'équation $2x^2 + 1 + 3x = 0$:

a) a deux solutions différentes **b)** a une unique solution **c)** n'a aucune solution

2 f est la fonction polynôme du second degré représentée ci-contre.



La forme canonique de $f(x)$ est :

a) $(x+1)^2+2$ **b)** $(x-1)^2+2$ **c)** $(x+1)^2-2$

3 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ a pour tableau de signes :

a)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

b)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

c)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

67 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Justifier.

```
1 forme_canonique(4x^2-12x+8)
  4*(x-3/2)^2-1
2 factoriser(4x^2-12x+8)
  4*(x-2)*(x-1)
```

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 12x + 8$.
Un logiciel de calcul formel donne les informations ci-contre.
Pour déterminer le minimum de la fonction f, on utilise :

a) la forme développée **b)** la forme canonique

c) la forme factorisée

2 Le polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -4(x-1)(x+2)$ a un discriminant :

a) strictement négatif **b)** nul **c)** strictement positif

3 La parabole d'équation $y = 9x^2 - 6x + 1$ dans un repère du plan :

a) coupe l'axe des abscisses en deux points distincts

b) est strictement au-dessus de l'axe des abscisses

c) est tangente à l'axe des abscisses

Exercices interactifs

Vrai-Faux

68 Voici un tableau de valeurs pour un polynôme f de degré 2, obtenu avec un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-1	0	1	2	3	4	5
2	ax²+bx+c	9	-1	5	27	65	119	189

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.

a) $f(x)$ est de signe constant.

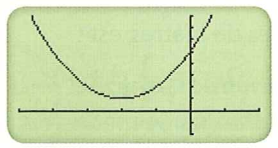
b) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

c) La fonction f admet un minimum.

d) $a < 0$.

69 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.
Voici la parabole obtenue à l'écran d'une calculatrice.
Elle représente une fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$



a) L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution.

b) $b^2 < 4ac$.

c) $c < 0$.

d) f admet un maximum.

Exercices interactifs

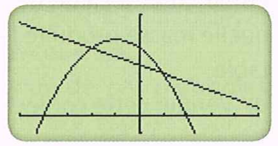
Se préparer au contrôle

70 **Résoudre une équation du second degré**

À l'écran d'une calculatrice, on a représenté les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$



a) Conjecturer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

b) Démontrer cette conjecture par le calcul.

Conseils

- Comment peut-on encore écrire l'équation ?
- Voir le cours, paragraphe 1 page 20, et l'exercice résolu 2 page 21.

71 **Utiliser la calculatrice**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 9x^2 - 6x + \frac{3}{4}$$

a) Tracer la courbe représentative de f à l'écran de la calculatrice.

b) Conjecturer le signe de $f(x)$ en fonction de x.

c) Déterminer par le calcul le signe de $f(x)$ et vérifier la conjecture.

Conseils

a) Que faut-il régler à la calculatrice avant de tracer la courbe ?

b) Quelle fonction de la calculatrice peut-on utiliser pour obtenir plus de précision ?

c) Voir le cours, paragraphe 2 page 20, et l'exercice résolu 1 page 21.

72 **Choisir la forme adaptée**

Une entreprise a un coût moyen de production $C(x)$, en euros, donné pour $x \in [0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = 2x^2 - 20x + 53$$

où x désigne le nombre d'unités produites, en centaines. Un logiciel de calcul formel donne le résultat :

```
1 forme_canonique(2x^2-20x+53)
  2•(x-5)^2+3
```

Choisir la forme adaptée afin de répondre aux questions suivantes.

a) Quelle quantité produite rend minimal le coût moyen de production ?

b) Quel est le coût moyen minimal de production ?

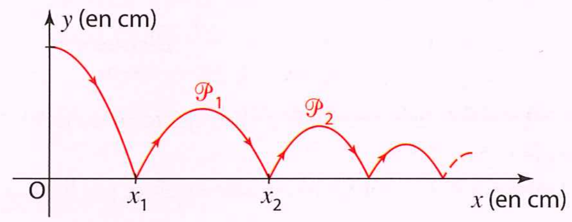
c) Quel est le coût moyen de production lorsque l'entreprise produit 400 unités ?

Conseils

- Quelle est la forme de $C(x)$ la plus adaptée pour répondre aux questions ?
- Revoir l'exercice résolu 1 page 19.

73 **Étudier l'équation d'une trajectoire**

Une balle magique rebondit sur le sol en perdant de la hauteur à chaque rebond. Entre deux chocs au sol successifs, sa trajectoire est une parabole. Dans le repère ci-dessous, la première parabole, $\mathscr{P}_1$, a pour équation : $y = -0{,}005x^2 + 2{,}9x - 322{,}5$



a) Calculer les abscisses x_1 et x_2 des deux premiers chocs au sol.

b) La hauteur maximale atteinte après le 2e rebond est 65 cm. Elle est atteinte au point d'abscisse $x = 530$. Quelle est l'équation de la deuxième parabole $\mathscr{P}_2$? On l'écrira $y = f(x)$ avec $f(x)$ sous forme canonique.

Conseils

a) De quelle équation sont solutions x_1 et x_2 ?

b) Quelles sont les valeurs de α et β ?

74 **Résoudre une inéquation du second degré**

Dans une pièce sont archivés des livres anciens. Pour que les livres ne se dégradent pas, on surveille de près la température.
Celle-ci évolue au cours de la journée selon la formule :

$$f(t) = -0{,}01t^2 + 0{,}24t + 1{,}72$$

où $f(t)$ est en degrés Celsius et t en heures avec $0 \leqslant t \leqslant 24$.
En-dessous de 3 °C, un chauffage se déclenche pour protéger les livres. Préciser les heures de la journée durant lesquelles le chauffage a fonctionné.

Conseils

- À quelle inéquation se ramène le problème ?
- Revoir l'exercice résolu 2 page 21.

Vérifier les réponses p. 272

Exercices d'approfondissement

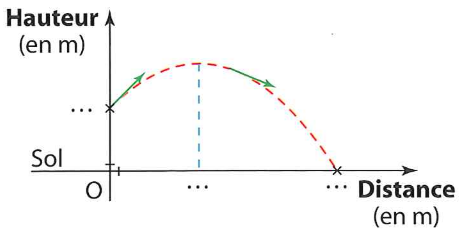
Pour aller plus loin

75 Avec un guide (1)

Un athlète s'entraîne au lancer de javelot pour les Jeux Olympiques.

Lancé à une hauteur de 1,50 m par rapport au sol, son javelot tombe au sol 98 m plus loin, après avoir entamé sa descente à 40 m du point de départ. Sa trajectoire est parabolique.

a) Compléter le schéma ci-dessous (échelle non respectée) par les informations données.



b) Déterminer une équation de la trajectoire du javelot dans le repère indiqué.

c) Déterminer la hauteur maximale atteinte par le javelot.

Guide de résolution

b) L'équation est de la forme $y = f(x)$ avec :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Déterminer $f(0)$, $f(98)$ et α d'après l'énoncé.
En déduire deux équations vérifiées par a et β, puis déterminer a et β.

c) Utiliser les coordonnées du sommet S de la parabole.

76 Avec un guide (2)

Une entreprise est spécialisée dans la préparation de pigments qui, mélangés à un solvant, permettent la fabrication de teintes servant en artisanat d'art.

Le coût total de fabrication d'une masse q d'un certain pigment est donné par :

$$C(q) = 0{,}05q^3 - 0{,}9q^2 + 10q$$

où q est exprimée en centaines de grammes et $C(q)$ en euros.

Le coût moyen par centaine de grammes produite est défini sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$$

a) Exprimer le coût moyen par centaine de grammes produite.

b) Déterminer pour quelle masse q produite le coût moyen $C_M(q)$ est minimal et préciser ce coût moyen minimal.

c) Le pigment est vendu au prix de 8 € pour 100 g. Conjecturer à l'aide de la calculatrice graphique pour quelle masse produite l'activité de l'entreprise est rentable.

d) Vérifier cette conjecture par le calcul.

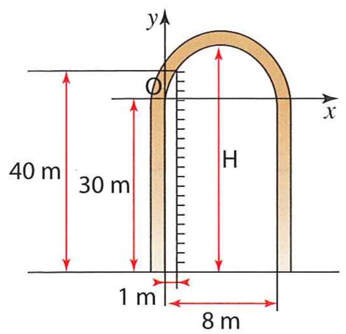
Guide de résolution

d) Déterminer la fonction bénéfice B.
Étudier le signe de $B(q)$.

77 Dans une cathédrale

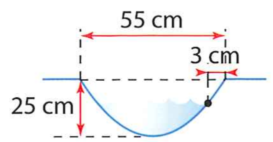
Un touriste visite une cathédrale et souhaite évaluer la hauteur d'une des voûtes, qui possède une forme parabolique. Il parvient à évaluer la hauteur des piliers latéraux, qui mesurent 30 m de hauteur et observe qu'un échaffaudage situé à 1 m du pilier et atteignant la voûte, mesure 40 m de hauteur. Les piliers sont séparés de 8 m.

Déterminer la hauteur H de la voûte.



78 Histoire d'eau

Dans la salle de bain de Mme D., la vasque en coupe de face a une forme de parabole. Sa profondeur est de 25 cm et 55 cm séparent le rebord gauche du rebord droit.

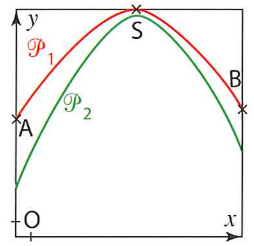


L'orifice du trop-plein se situe à 3 cm du rebord droit.
Quelle hauteur d'eau maximale Mme D. peut-elle mettre dans la vasque sans que l'eau ne se déverse par le trop-plein ?

79 Paraboles sur toile

Sur sa toile carrée de 109 cm de côté, *Montagne*, Vassili Kandinsky joue avec les paraboles et les couleurs.

Deux de ces paraboles ont été reprises sur le schéma ci-dessous.



Dans le repère indiqué, où l'unité est le centimètre, la parabole rouge $\mathscr{P}_1$ a pour équation :

$$y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{7}{4}x + 60$$

a) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, donner les deux autres formes de l'équation de la parabole $\mathscr{P}_1$.

b) Choisir la forme la plus adaptée de l'équation pour déterminer les coordonnées des points A et B, situés sur les bords de la toile, et du point S, sommet de $\mathscr{P}_1$.
Que peut-on en déduire pour le point S ?

c) La parabole $\mathscr{P}_2$ a pour équation :

$$y = -0{,}025x^2 + 2{,}9x + 24{,}7$$

Un motif empêche de voir si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont un point commun.
Déterminer par le calcul si c'est le cas ou non.

80 Un viaduc

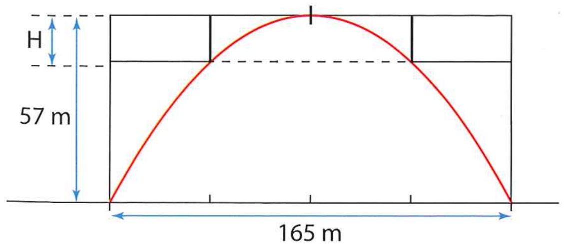
Le viaduc de Garabit a été construit sur la Truyère, dans le Cantal par Gustave Eiffel.

Son arche est un arc de parabole, sa flèche (hauteur de l'arc à compter des piles) est de 57 m.

La distance entre les piles est de 165 m.

Une telle structure parabolique assure une grande résistance au fléchissement.

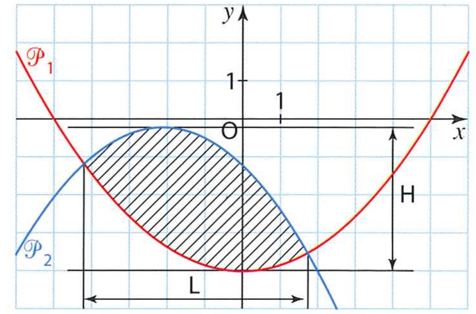
Déterminer la hauteur H du pilier intermédiaire situé à mi-chemin entre la pile et le sommet de l'arc.



81 Ébénisterie

Un marqueteur a dessiné le motif suivant, à partir de paraboles.

Il souhaite incruster dans la partie hachurée une lamelle de bois en acajou et pour cela voudrait connaître la largeur L et la hauteur H de cette partie.



L'unité choisie est le décimètre.

Dans le repère ci-dessus, la parabole $\mathscr{P}_1$ représente la fonction f, définie par :

$$f(x) = 0{,}16x^2 - 4$$

et la parabole $\mathscr{P}_2$ représente la fonction g, définie par :

$$g(x) = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{17}{18}x - \frac{11}{9}$$

Déterminer L et H.

Un métier

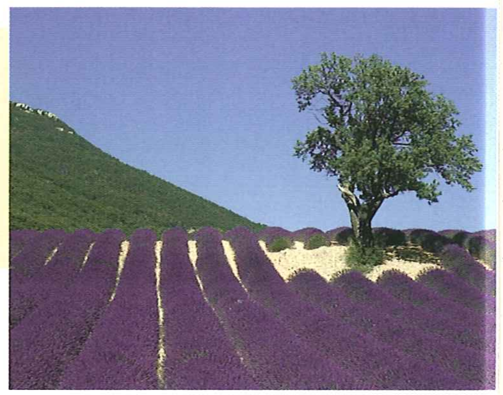
Le marqueteur fait des ouvrages de marqueterie, c'est-à-dire des assemblages décoratifs de lamelles de bois d'essences variées.

82 Problème ouvert

Un exploitant agricole achète un terrain rectangulaire de 8 hectares dont le périmètre est égal à 1 800 m. Quelles sont les dimensions de son terrain ?

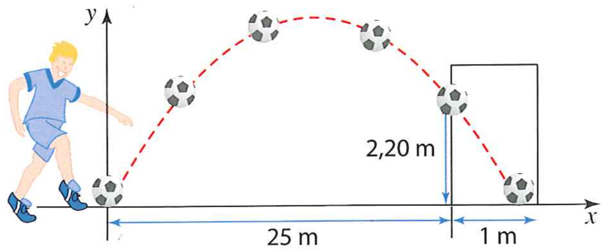
Info

L'are est une unité d'aire.
1 are = 100 m² ;
1 ha = 100 a.



83 **Défi**

Un joueur situé à 25 m du but adverse tente un tir et parvient à marquer.
Son ballon a franchi la ligne de but à une hauteur de 2,20 m, passant ainsi tout près de la barre transversale, puis a ensuite atteint le sol à 1 m derrière la ligne de but.
Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole, quelle hauteur maximale le ballon a-t-il atteinte ?



(échelle non respectée)

SUJETS D'EXPOSÉS

SUJET 1

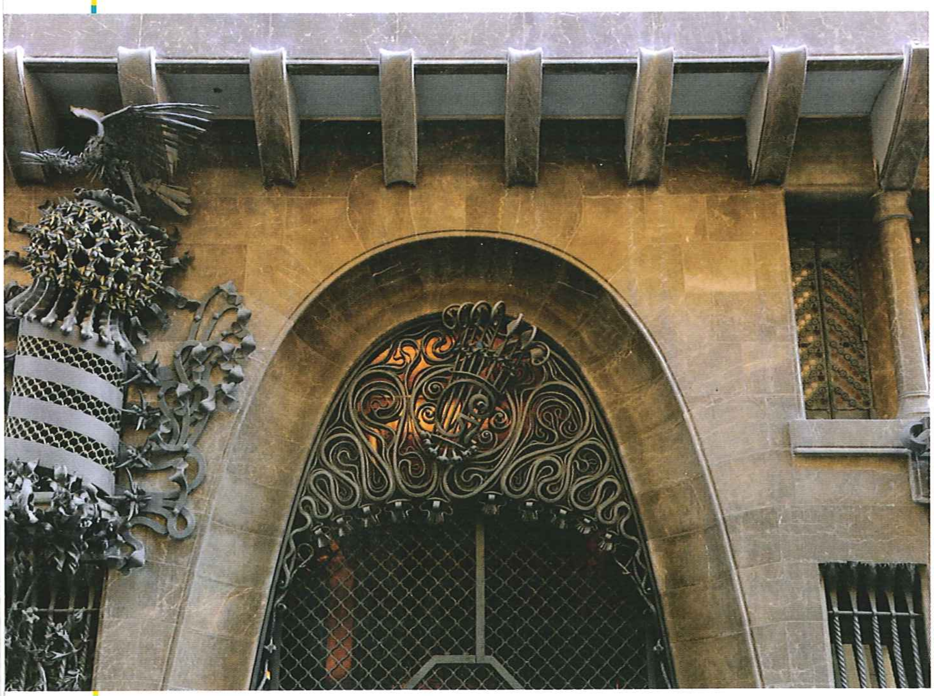
Le nombre d'or apparaît dans de nombreux domaines tels que l'architecture, la peinture, la géométrie, mais aussi la nature. Il fascine l'homme depuis l'Antiquité.

→ Faire une recherche sur son histoire au fil des âges.

→ Illustrer la diversité des domaines concernés par des exemples concrets et son lien avec les équations du second degré.

→ Lors d'un exposé, présenter ces recherches à la classe.

Le Parthénon, situé sur l'Acropole d'Athènes.



SUJET 2

Le palais Güell de Barcelone, construit par Gaudí entre 1880 et 1886, s'inscrit dans le courant de l'Art nouveau.
On peut voir des portes d'entrée en forme de paraboles.

→ Présenter des illustrations de l'utilisation de la parabole dans les réalisations humaines, architecturales ou artistiques.

→ Essayer de dégager les motivations de cette utilisation architecturale, esthétique, technique…