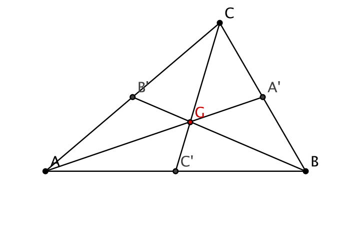
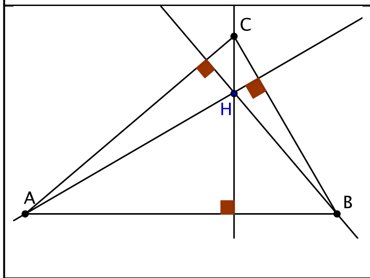
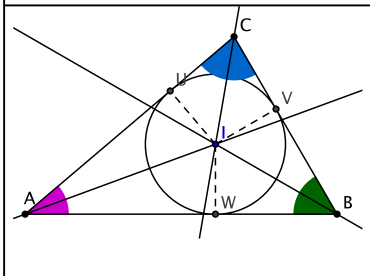
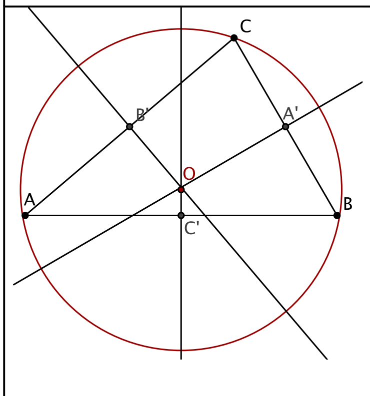
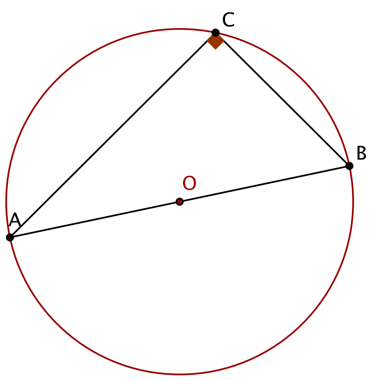
Rappels Géométrie dans le plan Seconde

1) Droites et centres remarquables d'un triangle

	Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle. Ce point est situé au deux tiers de la médiane à partir du sommet. On a alors l'égalité : GA = 2 GA' ; GB = 2GB' ; GC = 2GC'. La médiane [AA'] sépare l'aire du triangle ABC en deux aires égales.
	Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle. Si le triangle ABC est rectangle en C, alors l'orthocentre est le point C. Si H est l'orthocentre du triangle ABC, C est l'orthocentre du triangle AHB.
	Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I qui est le centre du cercle inscrit au triangle. La bissectrice d'un angle étant l'ensemble des points équidistants des deux côtés adjacents à l'angle, on a : IU = IV = IW. (IU) et (AC) sont perpendiculaires.
	Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. La médiatrice d'un côté étant l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment, on a : OA = OB = OC. Le point O est aussi l'orthocentre du triangle A'B'C'.

2) Triangle rectangle et théorème de Pythagore



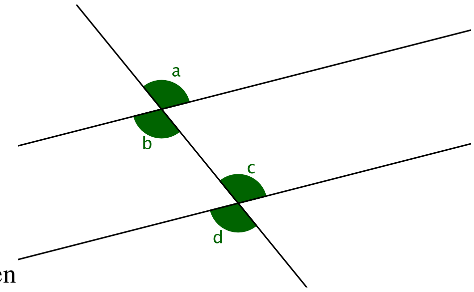
Théorème: Si ABC est un triangle rectangle en C, alors AB² = BC² + AC².
Réciproque: Si dans un triangle ABC, AB² = BC² + AC² alors le triangle est rectangle en C.

Théorème: Si ABC est un triangle rectangle en C, alors il est inscriptible dans le cercle de diamètre [AB]. Le centre du cercle circonscrit est le milieu de [AB].
Réciproque: Si le triangle ABC est inscriptible dans le cercle de diamètre [AB] alors il est rectangle en C.
Voir animations : http://dominique.frin.free.fr/geogebra/pythagore.html

Propriétés : Si le triangle ABC est rectangle en C, et O le milieu de [AB], alors la médiane [CO] a pour longueur la moitié de [AB].
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Soient deux point A et B du plan. L'ensemble des points M du plan tel que le triangle ABM est rectangle en M est le cercle de diamètre [AB] (privé des points A et B).

3) Les angles

a) Égalités d'angles : Par deux droites parallèles et une sécante, on forme comme sur la figure ci-contre:
des angles correspondants *a* et *c*, ainsi que *b* et *d*;
des angles alternes-internes *b* et *c*, des angles alternes-externes *a* et *d* .



b) Angles complémentaires : deux angles sont complémentaires si leur somme égale 90°. Dans un triangle ABC rectangle en A, les angles en B et en C sot complémentaires.

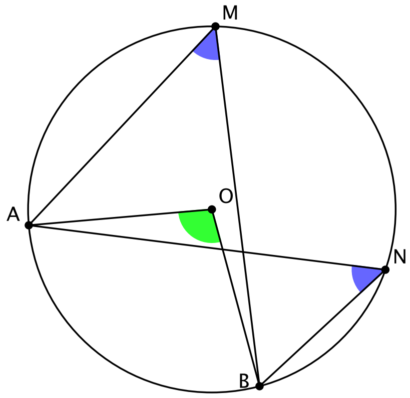
c) Angles supplémentaires : deux angles sont supplémentaires si leur somme égale 180°.
Dans un parallélogramme ABCD les angles adjacents (en A et en B par exemple) sont supplémentaires.

d) Angles inscrits, angles au centre :

- L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ a pour mesure la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
  Ces deux angles interceptent le même arc de cercle.
- Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc de cercle, donc sont de même mesure.

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB} .$$

Voir exercice sur les angles :
http://dominique.frin.free.fr/seconde/anglesf2.htm



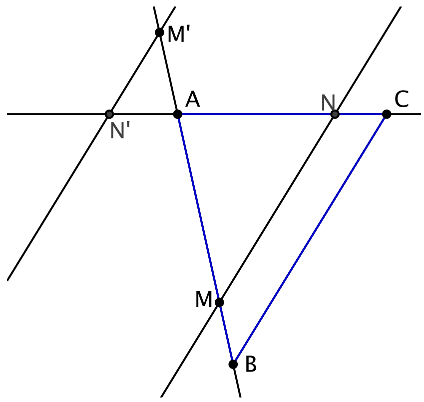
4) Théorème de Thalès

a) <u>Théorème de Thalès</u>: Si les triangles ABC et AMN sont tels que M est sur (AB), N est sur (AC) et les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

b) <u>Réciproque</u>: Si ABC est un triangle tel que M est sur (AB), N est sur (AC) et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



c) <u>Remarques:</u>

- Si k est le rapport de proportionnalité entre les cotés des deux triangles, le rapport entre leurs aires sera k^2 .
- Le théorème de la droite des milieux est un cas particulier du théorème de Thalès.

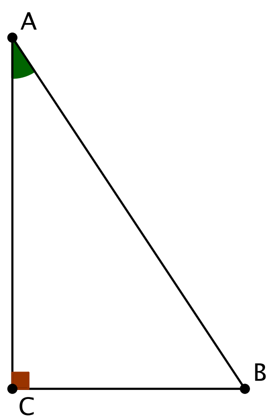
5) Trigonométrie dans le triangle rectangle

a) Dans un triangle ABC rectangle en C, on définit :

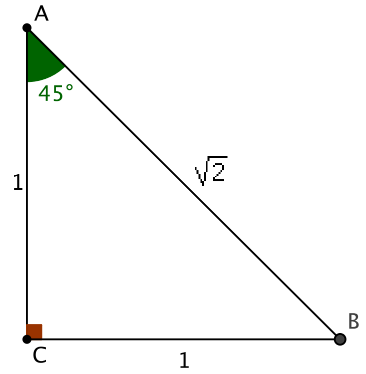
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB} ,$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB} ,$$

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC} .$$



b) Valeurs remarquables de sinus, cosinus et tangente

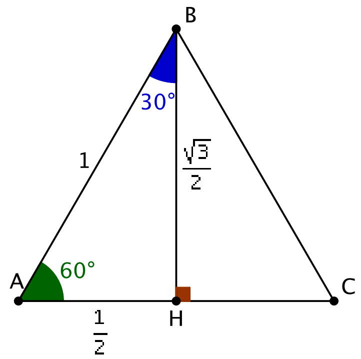


Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C tel que AC = BC = 1.
Le triangle ABC étant isocèle rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45°$.
D'après Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, on a :
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$ ($AB \neq -\sqrt{2}$ car c'est une longueur !)

$\cos 45° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 45° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 1. Appelons H le pied de la hauteur issue de B.
Le triangle ABC étant équilatéral, $\widehat{BAC} = 60°$.
Dans un triangle équilatéral, hauteurs et médianes sont confondues donc H est aussi le milieu de [AC] donc $AH = \dfrac{1}{2}$.



D'après Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $AB^2 = AH^2 + BH^2$

donc $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$, donc $BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($BH \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ car c'est une longueur !).

$\cos 60° = \dfrac{AH}{AB} = AH = \dfrac{1}{2}$; $\sin 60° = \dfrac{BH}{AB} = BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan 60° = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

Le triangle ABC étant équilatéral, hauteurs et bissectrices sont confondues, donc $\widehat{ABH} = 60°/2 = 30°$.

$\cos 30° = \dfrac{BH}{AB} = BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30° = \dfrac{AH}{AB} = AH = \dfrac{1}{2}$; $\tan 30° = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Résumé :

x	30°	45°	60°
$\sin x$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan x$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$