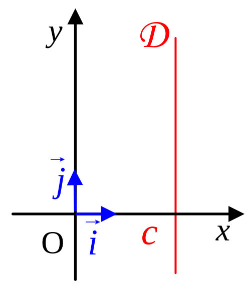
# CHAPITRE 12 : DROITES ET SYSTEMES

## I. Equation de droites

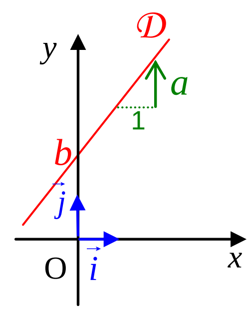
### 1. Caractérisation analytique d'une droite

Propriété :
Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$) un repère du plan.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

- Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $x = c$,
où $c$ est un nombre réel.




- Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $y = ax + b$,
où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.




Vocabulaire :
$a$ est appelé le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$.
$b$ est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration :
Soit A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$.
Dire qu'un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
D'après la condition de colinéarité : $(x - x_A)(y_B - y_A) = (x_B - x_A)(y - y_A)$.

- Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A = x_B$.
La condition de colinéarité peut s'écrire : $(x - x_A)(y_B - y_A) = 0$
Ce qui équivaut à $x = x_A$ car $y_A \neq y_B$, les points A et B étant distincts.
$\mathcal{D}$ vérifie une équation de la forme $x = c$ avec $c = x_A$ .

- Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A \neq x_B$ .

La condition de colinéarité peut s'écrire : $y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

$\mathcal{D}$ vérifie une équation de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = y_A - \left(\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x_A$.

Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

a) Coefficient directeur : -2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

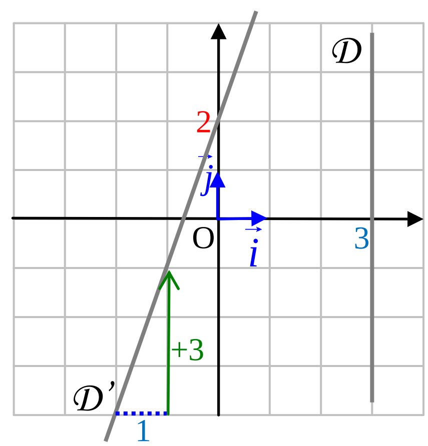
b) L'équation peut s'écrire : $y = -2x + \dfrac{1}{2}$

Coefficient directeur : -2

Ordonnée à l'origine : $\dfrac{1}{2}$

Exemples :

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $x = 3$
La droite $\mathcal{D}'$ a pour équation $y = 3x + 2$.
Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3.




Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation donnée

**Vidéo** https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ d'équations respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

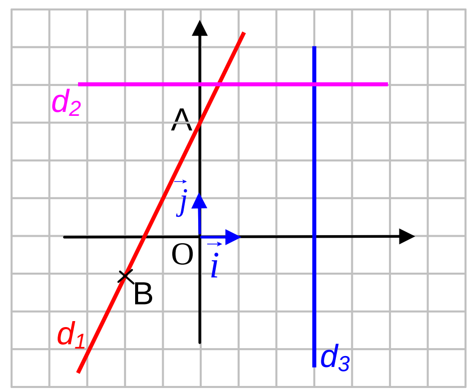
- La droite $d_1$ d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point A de coordonnée $(0;3)$ appartient à la droite $d_1$.
Soit B le point d'abscisse -2 appartenant à la droite $d_1$.
Les coordonnées de B vérifient l'équation de $d_1$, donc : $y_B = 2\text{x}(-2) + 3 = -1$.
Le point B de coordonnées $(-2;-1)$ appartient à la droite $d_1$.

On peut ainsi tracer la droite $d_1$ passant par A et B.

- La droite $d_2$ d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite $d_2$ est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;4)$.

Pour tracer la droite $d_2$, on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.

- La droite $d_3$ d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite $d_3$ est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$.




## 2. Conséquence :

Propriété :

Si A$(x_A ; y_A)$ et B$(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît deux points

**Vidéo** https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) un repère du plan.

Soit A$(4;-1)$ et B$(3;5)$ deux points d'une droite *d*.

Déterminer une équation de la droite *d*.

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite *d* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = ax + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de *d* est $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-(-1)}{3-4} = \dfrac{6}{-1} = -6$

Comme A$(4;-1)$ appartient à la droite *d*, ses coordonnées vérifient l'équation de *d* soit :
-1 = -6 x 4 + $b$.
D'où $b$ = -1 + 6 x 4 = 23
Une équation de *d* est donc : $y = -6x + 23$.

### 3. Propriété réciproque :

Propriété :
Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) un repère du plan et $a$, $b$, $c$ trois nombres réels, $a$ étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ sont tels que :
$y = ax + b$ ou $x = c$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée
**Vidéo** https://youtu.be/XA0YajthETQ
Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) un repère du plan.
Les points A$(6,4;42)$ et B$(346;2419)$ appartiennent-ils à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$ ?

- Dire que le point A$(6,4;42)$ appartient à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite *d*.
Ce qui n'est pas le cas, puisque 42 $\neq$ 7 x 6,4 – 3 = 41,8.
Le point A n'appartient donc pas à la droite *d*.

- Les coordonnées de B$(346;2419)$ vérifient l'équation de la droite *d*. En effet :
2419 = 7 x 346 – 3 donc le point B appartient à la droite *d*.

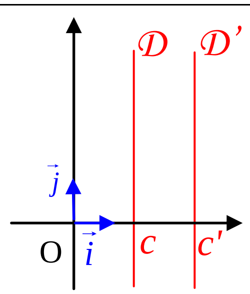
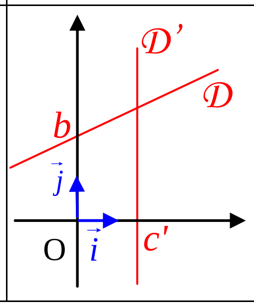
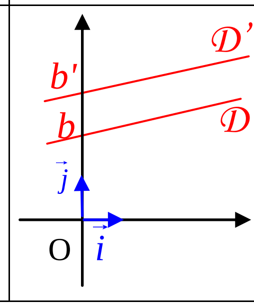
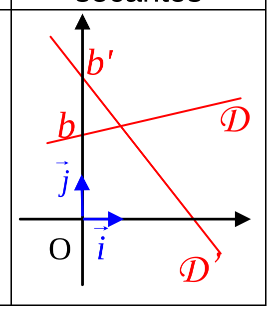
## II. Position relative de deux droites

Propriété :
Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) un repère du plan.
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Démonstration :

La droite $\mathcal{D}$ admet une équation du type $y = ax + b$.
La droite $\mathcal{D}'$ admet une équation du type $y = a'x + b'$.
Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$ d'abscisses respectives 0 et 1 alors
A et B ont pour coordonnées $(0;b)$ et $(1;a+b)$.
De même, A' et B' deux points de $\mathcal{D}'$, ont pour coordonnées $(0;b')$ et $(1;a'+b')$.
Dire que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire 1 x $a'$ = 1 x $a$ , soit $a = a'$.

Tableau récapitulatif :

| Equation de $\mathcal{D}$ | $x = c$ | $y = ax + b$ | $y = ax + b$ | |
|---|---|---|---|---|
| Equation de $\mathcal{D}'$ | $x = c'$ | $x = c'$ | $y = a'x + b'$ | |
| Position de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ | $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ | $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes | Si $a = a'$ : $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ | Si $a \neq a'$ : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes |
| Représentation |  |  |  |  |

**Vidéo** https://youtu.be/gTUPGw7Bulc

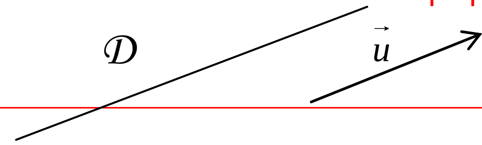
Exemples :
Dans un repère du plan, $d_1$, $d_2$ et $d_3$ admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4,\ \ y = 3x + 9,\ x = 8$$

Les droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites $d_1$ et $d_3$ sont sécantes.

## III. Vecteur directeur d'une droite

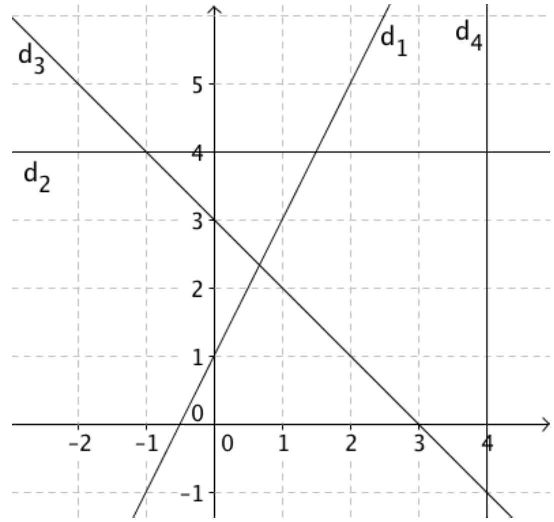
Définition :
$\mathcal{D}$ est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite $\mathcal{D}$.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

**Vidéo** https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites $d_1$, $d_2$, $d_3$ et $d_4$.




Pour $d_1$ : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

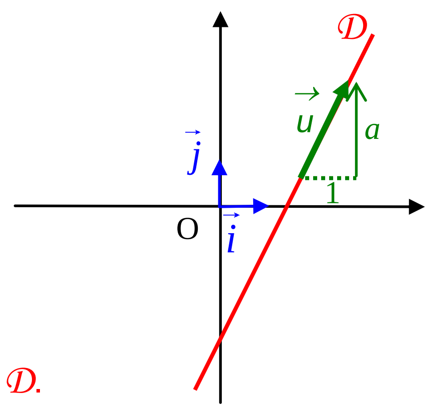
Pour $d_2$ : $\vec{d}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

Pour $d_3$ : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Pour $d_4$ : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$

Propriété :
Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
- Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

- Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, où $y = ax + b$ est une équation de la droite $\mathcal{D}$.




Démonstration :
La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ passe par les points A $(0;b)$ et B$(1;a+b)$.
Les points A et B étant distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\a+b-b\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple :

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît un point et un vecteur directeur

**Vidéo** https://youtu.be/4NXgsUSKrrk

Soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) un repère du plan.

Soit A$\left(-3;4\right)$ un point d'une droite *d* admettant $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Déterminer une équation de la droite *d*.

On considère un point M$\left(x;y\right)$ de la droite *d*.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont donc colinéaires. En effet, $\overrightarrow{AM}$ est également un vecteur directeur de *d*.

Le critère de colinéarité s'écrit donc : -($x$ + 3) = 2($y$ – 4)

Soit : -$x$ – 3 = 2$y$ – 8 = 0

⇔ 2$y$ = -$x$ + 5

L'équation réduite de *d* est donc : $y$ = -0,5$x$ + 2,5.

# IV. Droites et systèmes

## 1. Systèmes admettant un couple de solution unique

**Vidéo** https://youtu.be/-LV_5rkW0RY

Définition :

Soit $a$, $b$, $a'$ et $b'$ des nombres réels donnés.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ c'est trouver **tous** les couples $(x\,;\,y)$ de nombres réels vérifiant **simultanément** les deux équations du système.

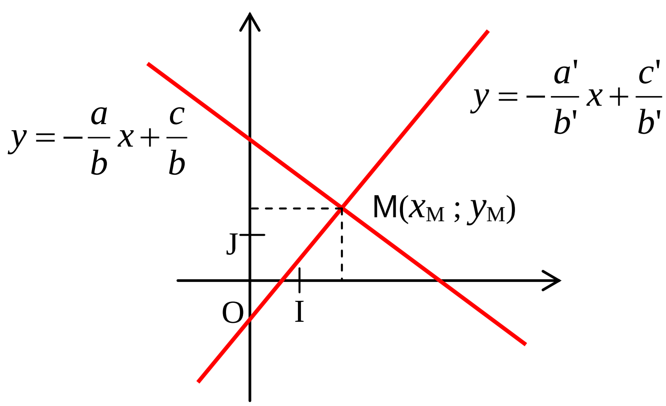
Soit (S) le système d'équations : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où $a$, $b$, $a'$ et $b'$ sont des nombres réels donnés avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} by=-ax+c \\ b'y=-a'x+c' \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x+\dfrac{c'}{b'} \end{cases}$

Si les coefficients directeurs des droites associées à ces deux équations sont différents alors elles possèdent un unique point d'intersection, soit : $-\dfrac{a}{b} \neq -\dfrac{a'}{b'}$.

Soit encore : $\boxed{ab' \neq a'b}$




Si M est le point d'intersection des deux droites, le couple de ses coordonnées $(x_M\,;\,y_M)$ est solution du système.

Méthode : Résoudre un système d'équation par la méthode de substitution

**Vidéo** https://youtu.be/24VsDZK6bN0

**Vidéo** https://youtu.be/tzOCBkFZgUI

Soit le système (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ -x + y = 6 \end{cases}$

1) Le système (S) admet-il des solutions ?
2) Résoudre le système (S).

1) On isole l'inconnue $y$ dans chacune des équations :

$\begin{cases} -2y = -3x - 17 \\ y = x + 6 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{17}{2} \\ y = x + 6 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les droites associées aux équations du système sont sécantes car elles possèdent des coefficients directeurs différents.
Le système possède donc un unique couple solution.

2) A noter : Ici, la méthode de substitution se prête bien à la résolution du système car une équation contient une inconnue facile à isoler.

On commence par isoler une inconnue dans une équation. On exprime $x$ en fonction de $y$ dans la deuxième équation.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

On substitue l'inconnue isolée dans l'autre équation. On remplace $x$ dans la première équation par son expression en fonction de $y$.

$$\begin{cases} 3x - 2\left(x + 6\right) = -17 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

On résout cette équation pour trouver la valeur d'une inconnue.

$$\begin{cases} 3x - 2x - 12 = -17 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 - 17 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

On substitue dans la deuxième équation la valeur ainsi trouvée pour calculer $y$.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -5 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

La solution est le couple (-5 ; 1).

Méthode : Résoudre un système d'équations pas la méthode des combinaisons linéaires

**Vidéo** https://youtu.be/UPIz65G4f48

**Vidéo** https://youtu.be/V3yn_oEdgxc

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d'éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l'inconnue $x$.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ 15x + 9y = 6 \end{cases} \\ - \quad\quad\quad\quad \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6 \end{array}$$

On résout l'équation obtenue pour trouver une inconnue.

$$-19y = 19$$
$$y = -1$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour calculer la valeur de la 2e inconnue.

$$3x - 2 \times (-1) = 5$$

$\Leftrightarrow 3x+2=5$
$\Leftrightarrow 3x=5-2$
$\Leftrightarrow 3x=3$
$\Leftrightarrow x=1$

La solution du système est donc le couple (1 ; -1).

## 2. Exemple d'un système n'admettant pas de solution

**Vidéo** https://youtu.be/lYzK0zVr-Lk

Soit (S) le système : $\begin{cases} -3x+y=1 \\ 6x-2y=6 \end{cases}$

Résolution du système :

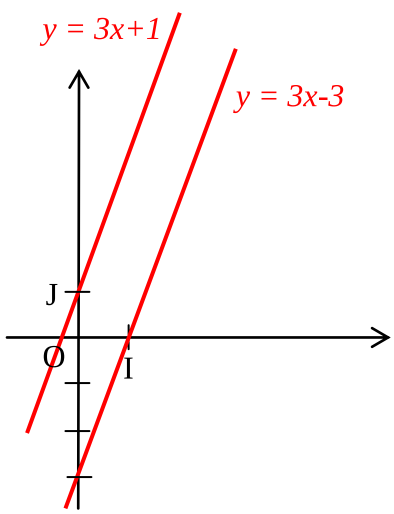
En isolant *y* dans la première équation, on a : $y=3x+1$
En remplaçant *y* dans la deuxième équation, on a : $6x-2(3x+1)=6$
Soit : $6x-6x-2=6$
Soit encore : $-2=6$. On a aboutit à une contradiction.
Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels ($x$ ; $y$).
Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y=3x+1 \\ -2y=-6x+6 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=\dfrac{-6}{-2}x+\dfrac{6}{-2} \end{cases}$

Soit encore : $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=3x-3 \end{cases}$




Les droites d'équations $y=3x+1$ et $y=3x-3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n'existe pas de couple de nombres réels ($x$ ; $y$) vérifiant simultanément les équations des deux droites.

## 3. Exemple d'un système admettant une infinité de solutions

**Vidéo** https://youtu.be/lYzK0zVr-Lk

Soit (*S*) le système : $\begin{cases} -6x-3y=-6 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Résolution du système :

Le système (S) équivaut à : $\begin{cases} -3y=6x-6 \\ y=-2x+2 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} y=\dfrac{6}{-3}x-\dfrac{6}{-3} \\ y=-2x+2 \end{cases}$

Soit encore : $\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=-2x+2 \end{cases}$

Tous les couples de coordonnées ($x$ ; $y$) vérifiant l'équation $y=2x-1$ sont solutions du systèmes (S).
Pour $x$ = 5 par exemple, $y$ = -2x5 + 2. Le couple (5 ; -8) est solution.
Il existe une infinité de couples de nombres réels ($x$ ; $y$) vérifiant l'équation $y=-2x+2$.
Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :

Les droites associées à ces deux équations sont confondues.