CHAPITRE 1

Fonctions, équations, inéquations

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Signe d'un nombre - Inégalités

nombres strictement négatifs 0 nombres strictement positifs

- L'écriture $x > 0$ signifie que x est un nombre strictement positif.
- $x \geqslant 0$ signifie que x est positif.

1 Que signifient les écritures suivantes ?
a) $x < 0$ **b)** $x \leqslant 0$ **c)** $x \leqslant 3$ **d)** $x > 4$

2 Vrai ou faux ?
Le nombre $-x$ est toujours un nombre négatif.

Signe d'une somme

- La somme de deux nombres positifs est positive.
- La somme de deux nombres négatifs est négative.

3 Complétez les pointillés convenablement.
a) Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $a + b$ …
b) Si $a < 0$ et $b < 0$, alors $a + b$ …

4 Vrai ou faux ?
La somme de deux nombres de signes contraires peut être soit positive, soit négative.

Signe d'un produit, d'un quotient

- Le produit (ou le quotient) de deux nombres non nuls et **de même signe** est strictement positif.
- Le produit (ou le quotient) de deux nombres non nuls et **de signes contraires** est strictement négatif.

5 Complétez les pointillés convenablement.
a) Si $a > 0$ et $b > 0$, alors ab … et $\frac{a}{b}$ …
b) Si $a < 0$ et $b < 0$, alors ab … et $\frac{a}{b}$ …
c) Si $a < 0$ et $b > 0$, alors ab … et $\frac{a}{b}$ …

6 Vrai ou faux ?
a) Quel que soit le nombre a non nul, a et $\frac{1}{a}$ ont le même signe.
b) a, b et c sont trois nombres tels que $a > 0$ et $abc > 0$. Alors b et c sont de même signe.

Règles de calcul sur les inégalités

1. Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $ac < bc$.
Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $ac > bc$.
2. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

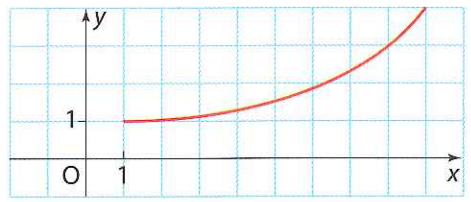
7 Résolvez les inéquations suivantes.
a) $3x - 2 > x + 5$ **b)** $2x - 5 \leqslant 5x + 7$ **c)** $-5x + 1 \leqslant 2x - 3$

8 Résolvez l'équation $(x - 3)(x + 5) = 0$.

Voir les corrigés p. 274

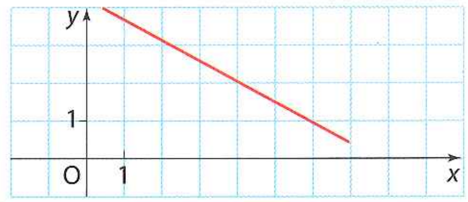
Activité 1 IDÉES DE CROISSANCE ET DE DÉCROISSANCE

1 Sur la figure, la courbe « monte » de gauche à droite. Elle représente une fonction f **croissante** : « lorsque les nombres x **augmentent**, les nombres $f(x)$ **augmentent** ».



a) Complétez avec > ou < sans chercher à lire les valeurs :
- $f(2)$ ….. $f(5)$
- $f(4{,}2)$ ….. $f(1{,}6)$

Sur la figure, la courbe « descend » de gauche à droite. Elle représente une fonction g **décroissante** : « lorsque les nombres x **augmentent**, les nombres $g(x)$ **diminuent** ».



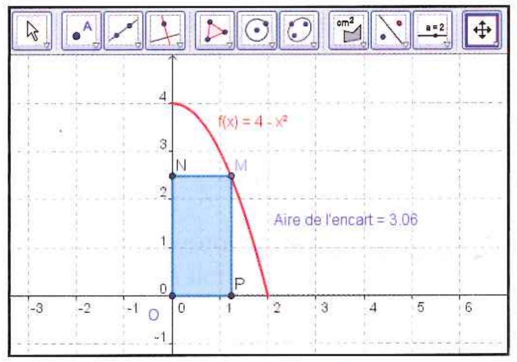
b) Complétez avec > ou < sans chercher à lire les valeurs :
- $g(1)$ ….. $g(3{,}5)$
- $g(2{,}6)$ ….. $g(1{,}9)$

2 **a)** L'aire S d'un disque est fonction du rayon r ; on a $S = \pi r^2$. Cette fonction est-elle croissante ? décroissante ?
b) Lorsqu'on vide une citerne d'eau, la quantité d'eau dans la cuve est fonction du temps d'écoulement. Cette fonction est-elle croissante ? décroissante ?

Activité 2 VOILE PUBLICITAIRE

TICE

Un afficheur souhaite créer un nouveau modèle de voile publicitaire. Sa bordure est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 4 - x^2$ pour $x \in [0 ; 2]$.
Le mât est sur l'axe des ordonnées.



Le but de l'activité est de placer M sur la courbe afin de connaître l'aire maximale de l'encart publicitaire formé par le rectangle MNOP.

1 À l'aide de GeoGebra, tracez la courbe représentative de la fonction f pour $x \in [0 ; 2]$ en saisissant fonction [4-x^2,0,2]. Placez M sur la courbe.

2 Dessinez le rectangle MNOP représentant l'encart. outil 1

Aide Pour P, saisissez P = (x(M) , 0) ; pour N, saisissez N = (0 , y(M)).

3 Déplacez M à l'aide de la souris. Grâce à la fenêtre Algèbre, répondez au problème posé. outil 5

Problème ouvert

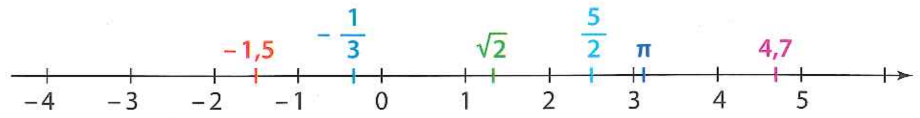
Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

On souhaite fabriquer une cuve à ciel ouvert pour recueillir de l'eau. Cette cuve a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée de côté x et de hauteur h (en mètres). La cuve a un volume de 4 m^3.
On souhaite peindre les parois intérieures de cette cuve.
Testez des valeurs de x. Quelles semblent être les dimensions de la cuve qui permettront d'utiliser le minimum de peinture ?

1 L'ensemble ℝ, les intervalles

L'ensemble de tous les nombres, entiers, décimaux, rationnels, irrationnels, est appelé ensemble des **nombres réels**, et il est noté **ℝ**.

Il est commode de le représenter par une droite graduée.



Animation

L'étude des fonctions nécessite de définir certaines parties de ℝ : **les intervalles**.

- L'intervalle **fermé** $[a\,;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

Les nombres a et b **sont** dans l'intervalle $[a\,;b]$ donc les crochets « **englobent** » a et b.

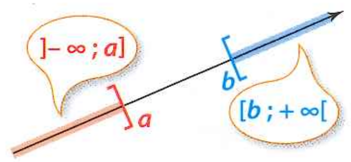
- L'intervalle **ouvert** $]a\,;b[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $a < x < b$.

Les nombres a et b **ne sont pas** dans l'intervalle $]a\,;b[$ donc les crochets « **n'englobent** » **ni** a, **ni** b.

- On définit de même les intervalles $]a\,;b]$ et $[a\,;b[$.
- L'intervalle $[b\,;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \geqslant b$.

Le symbole $+\infty$ se lit « plus l'infini ».

- L'intervalle $]-\infty\,;a]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant a$.
- On définit de même les intervalles $]b\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;a[$.
- L'ensemble ℝ est un intervalle que l'on note $]-\infty\,;+\infty[$.



Nous aurons à considérer aussi des réunions d'intervalles. **Par exemple**, si on enlève le nombre 1 de l'ensemble ℝ, l'ensemble obtenu est la réunion de deux intervalles, qui sont $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

Cet ensemble est noté $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Le symbole ∪ se lit « union ».

2 Les fonctions

2.1 Fonction. Image. Antécédent

Définition 1

$f(x)$ se lit « f de x ».

D est un **intervalle** de ℝ (ou une **réunion d'intervalles** de ℝ).

- Fabriquer ou **définir une fonction f** de D dans ℝ, c'est associer à chaque nombre x de D, un réel unique noté $f(x)$.
- On dit que D est **l'ensemble de définition de f**, ou encore que f est définie sur D.
- Le nombre $f(x)$ s'appelle l'**image de x par f**.

…symbole ∈ …gnifie « appar-…ent à ».

Vocabulaire. Notation. Une phrase telle que « f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ » signifie que l'ensemble de définition de f est $[0\,;+\infty[$, et que l'image de x est le nombre $\sqrt{x}$. Ce que l'on peut noter aussi, $f : x \mapsto \sqrt{x}\,,\ x \in [0\,;+\infty[$.

Antécédent. Si un nombre k est l'image d'un nombre x, c'est-à-dire si $f(x)=k$, alors on dit que x est un antécédent de k.

Par exemple, si $f(x)=x^2$, alors $f(2)=2^2=4$. Donc 2 est un antécédent de 4. Mais -2 est aussi un antécédent de 4 car $f(-2)=(-2)^2=4$.

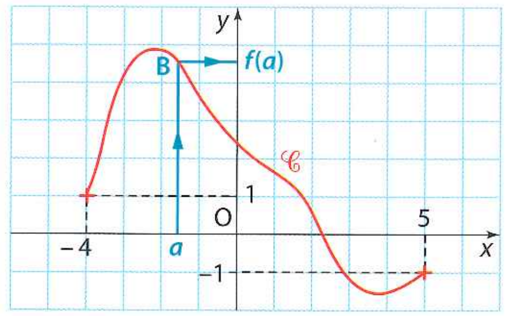
2.2 Représentation graphique

Définition 2

f est une fonction et D est son ensemble de définition.

- La **représentation graphique** $\mathscr{C}$ (ou courbe représentative) **de f** dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où x est un nombre de D.
- On dit que **la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=f(x)$**.

Exemple. La figure montre la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $D=[-4\,;5]$. Les flèches indiquent comment placer le point B de la courbe qui a pour abscisse a. Ainsi B $(a\,;f(a))$.



Il résulte de la définition **2** que :

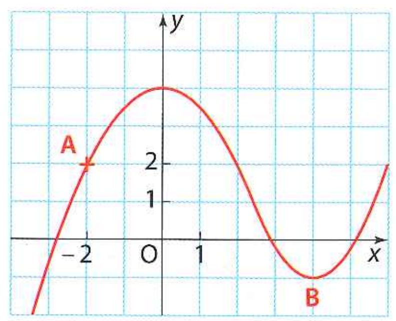
Conséquences

- Étant donné un point M de coordonnées $(a\,;b)$ (avec a dans D) : **si $b=f(a)$**, alors M appartient à $\mathscr{C}$, **sinon** M n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
- Dire qu'une courbe a pour équation $y=f(x)$ signifie que cette courbe est la représentation graphique de la fonction f.

Attention. Convention. Une lecture graphique ne donne que des valeurs approchées, sauf quand le codage indique, pour quelques points, la valeur exacte de leurs coordonnées.

→ *exercice résolu B, page 28.*

Ici, le croisillon indique que A est un nœud du quadrillage ; ses coordonnées exactes sont $(-2\,;2)$. Pour B, les valeurs sont approchées, $x_B \approx 4$, $y_B \approx -1$.



COURS

3 Sens de variation

3.1 Définition

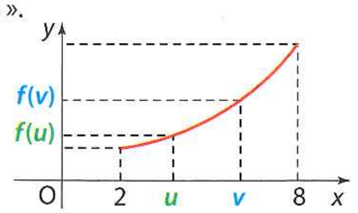
Définition 3 f est une fonction et I est un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

- Dire que f est **strictement croissante sur l'intervalle** I signifie que pour tous nombres u et v de l'intervalle I, si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$.
- Dire que f est **strictement décroissante sur l'intervalle** I signifie que pour tous nombres u et v de l'intervalle I, si $u < v$, alors $f(u) > f(v)$.

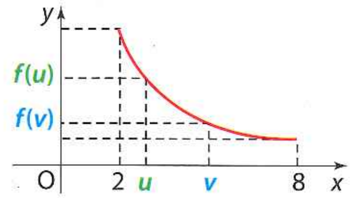
Si l'inégalité $u < v$ implique l'inégalité large $f(u) \leqslant f(v)$, on dit que f est **croissante** sur I. Et si elle implique l'inégalité large $f(u) \geqslant f(v)$, on dit que f est **décroissante** sur I.

Exemples

Courbe d'une fonction strictement croissante sur $[2 ; 8]$. De la gauche vers la droite, la courbe « monte ».



Courbe d'une fonction strictement décroissante sur $[2 ; 8]$. De la gauche vers la droite, la courbe « descend ».

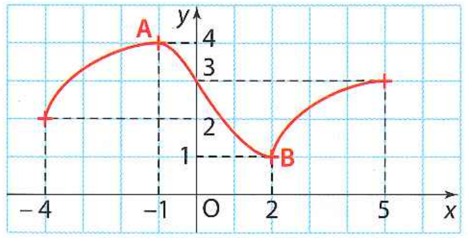


3.2 Tableau de variation. Maximum. Minimum

Exemple

Animation

La fonction f représentée ci-dessous est définie sur l'intervalle $[-4 ; 5]$.



Voici son **tableau de variation** :

x	-4		-1		2		5
f	2	↗	4	↘	1	↗	3

Un tel tableau indique les plus grands intervalles sur lesquels f est strictement croissante (flèche montante), est strictement décroissante (flèche descendante). Il indique aussi les valeurs remarquables de f.

La lecture du tableau montre que 4 est la plus grande valeur de f. On dit que 4 est le **maximum** de f sur $[-4 ; 5]$, et qu'il est atteint lorsque $x = -1$. Le point A$(-1 ; 4)$ est le **point le plus haut** de la courbe.

De même, on dit que 1 est le **minimum** de f sur $[-4 ; 5]$, et qu'il est atteint lorsque $x = 2$. Le point B$(2 ; 1)$ est le point **le plus bas** de la courbe.

Définition 4 f est une fonction définie sur D, I est un intervalle contenu dans D et a est un nombre de I.

- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction : pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.
- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction : pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

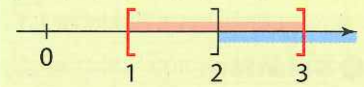
Compléments numériques

OBJECTIF 1 Passer des inégalités aux intervalles

Inégalité	Représentation sur un axe	Intervalle
$x > a$	a	$]a ; +\infty[$
$x < b$	b	$]-\infty ; b[$
$a < x < b$	a b	$]a ; b[$

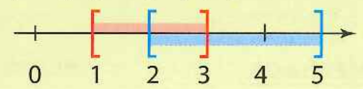
Attention
Dans le cas d'une inégalité au sens large ($\leqslant$ ou $\geqslant$), pensez au sens des crochets.
Par exemple :
$a \leqslant x < b$
↓ ↓
$[a ; b[$

- **L'intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant aux deux intervalles à la fois.
Par exemple :
$[1 ; 3] \cap]2 ; +\infty[=]2 ; 3]$.



Notation
Le symbole $\cap$ se lit « inter ».

- **La réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant à l'un, au moins, des deux intervalles (ils peuvent être dans les deux).
Par exemple :
$[1 ; 3] \cup [2 ; 5] = [1 ; 5]$.



Notation
Le symbole $\cup$ se lit « union ».

EXERCICE RÉSOLU A Utiliser les intervalles

Animation

1. Sur une droite graduée, coloriez les nombres x tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ **et** $x > 2$, puis décrivez cet ensemble en utilisant les intervalles.
2. Même question avec $1 \leqslant x \leqslant 3$ **ou** $x > 2$.

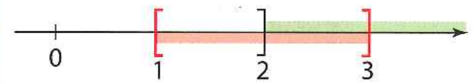
Méthode

On colorie :
– en rouge, les nombres x tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$;
– en vert, les nombres x tels que $x > 2$.

1. Les nombres x qui sont tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ **et** $x > 2$ sont coloriés en rouge **et** en vert.

2. Les nombres x qui sont tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ **ou** $x > 2$ sont coloriés en rouge **ou** en vert.

Solution



1. Les nombres cherchés sont les nombres de l'intervalle $]2 ; 3]$.

2. Les nombres cherchés sont les nombres de l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Mise en pratique

1 Complétez à l'aide des symboles $\in$ ou $\notin$.
a) -1 …… $[-1 ; 2[$. **b)** $\frac{-2}{3}$ …… $]-\infty ; -1[$.
c) $5{,}9$ …… $]5{,}8 ; +\infty[$. **d)** 7 …… $]0 ; 7[$.

2 **1.** Représentez sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $x > 3$.
À quel intervalle cet ensemble est-il égal ?
2. Mêmes questions lorsque :
a) $x \leqslant -2$;
b) $-1 < x \leqslant 0$;
c) $2 \leqslant x \leqslant 5$;
d) x est strictement inférieur à 1 ;
e) x est strictement compris entre 2 et 3.

3 Représentez sur une droite graduée l'ensemble des nombres x satisfaisant la condition.
a) $x \in]-10 ; 15]$. **b)** $x \in [7 ; +\infty[$. **c)** $x \in]-\infty ; 4[$.

4 Dans chaque cas, traduisez par des inégalités l'appartenance du nombre x à l'intervalle précisé.
a) $x \in [7 ; 7{,}5]$. **b)** $x \in]-1 ; 0]$.
c) $x \in]-\infty ; 9]$. **d)** $x \in]2 ; +\infty[$.

5 Reprenez les questions de l'exercice résolu A avec les nombres y tels que :
a) $y > -3$ et $y < 4$. **b)** $y \leqslant \frac{1}{3}$ et $y < \frac{1}{2}$.
c) $y > -3$ ou $y < 4$. **d)** $y \leqslant \frac{1}{3}$ ou $y < \frac{1}{2}$.

OBJECTIF 2 Déterminer l'image d'un nombre

f est une fonction définie sur un ensemble D.

- L'image de tout nombre x de D est le nombre $f(x)$. → *exercice résolu C*
- La représentation graphique de f, ou courbe représentative de f, est l'ensemble des points M(x ; $f(x)$) avec x dans D. → *exercice résolu B*

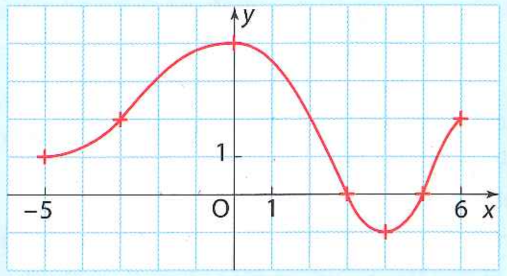
EXERCICE RÉSOLU B Lire une image sur un graphique

Animation

La courbe représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;6]$. Utilisez ce graphique pour donner une valeur exacte, ou approchée, de :

1. l'image de 1 ;

2. l'image de -3.



Méthode

1. On repère 1 sur l'axe des abscisses.
Par ce point, on trace la parallèle à (Oy).
Elle coupe la courbe en A.
On lit alors l'ordonnée de A : cette ordonnée est l'image de 1.

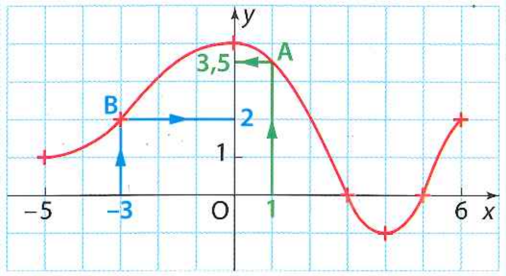
- Le graphique ne permet pas de donner la valeur exacte de $f(1)$, mais seulement une valeur approchée.

2. On procède comme à la question **1.** (point B). L'ordonnée de B est $f(-3)$.

- Le graphique, grâce aux conventions, permet de donner la valeur exacte de $f(-3)$.

Solution

1.



D'après la lecture graphique : $f(1) \approx 3{,}5$.

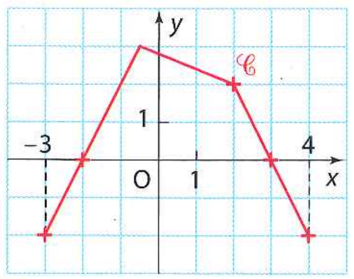
2. D'après la lecture graphique : $f(-3) = 2$.

Mise en pratique

6 La courbe représente une fonction f définie sur $[-3\,;\,4]$. Donnez une valeur approchée ou exacte des nombres :

1. image de -3 ; image de 1.

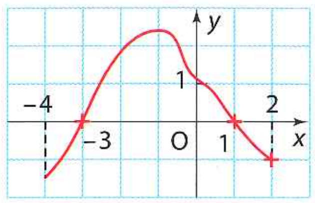
2. $f(0)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$.



7 La courbe représente une fonction f définie sur $[-4\,;2]$.
Donnez une valeur approchée ou exacte des nombres :

1. image de -4, de -1, de 1.

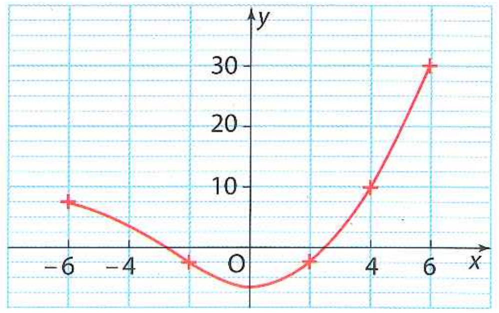
2. $f(-3)$; $f(0)$; $f(2)$.



Suite p. 29

Mise en pratique (suite)

8 La courbe représente une fonction f définie sur $[-6\,;6]$.



Pour chaque affirmation, dite[s] [si elle est vraie ou] fausse.

a) 2 et -2 ont des images opposées.

b) $f(4) = 10$.

c) L'image de -4 est négative.

d) $f(-6) > 0$.

e) L'image de 5 est inférieure à 30.

EXERCICE RÉSOLU C Calculer une image

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2$.

1. Calculez l'image de 4.

2. Calculez l'image de $3t$, où t est un nombre quelconque.

Méthode

1. Pour calculer $f(4)$, on remplace x par 4 dans l'expression $f(x)$.

2. On remplace x par $3t$ dans l'expression $f(x)$.

- On utilise l'identité remarquable :
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 6t$ et $b = 1$.

Solution

1. $f(4) = (2\times 4 - 1)^2$
$= 7^2$
$= 49$

2. $f(3t) = (2\times 3t - 1)^2$
$= (6t-1)^2$
$= (6t)^2 - 2\times 6t \times 1 + 1^2$
$= 36t^2 - 12t + 1$

Revoir les bases
Respectez toujours les priorités de calcul : on calcule d'abord 2×4 ($= 8$) **puis** on soustrait 1.

Mise en pratique

9 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -3x^2 + 5x.$$
1. Calculez les images de 1 ; -3 et 10^3 par f.

2. Calculez $f(6)$.

10 f est la fonction définie pour tout nombre non nul par :
$$f(x) = -x^2 + \frac{6}{x}.$$
1. Calculez les images de 3 et -4 par f.

2. Calculez $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

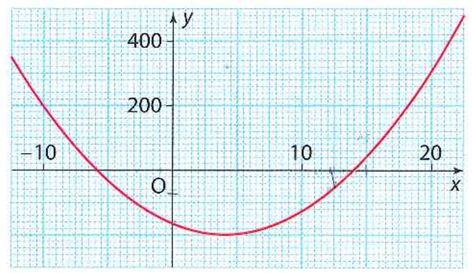
11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 - 2.$$
1. Calculez les images de 1 ; 2 et 3.

2. Calculez l'image du nombre $2t$.

12 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{1}{x^2+2}.$$
1. Calculez les images de -1 ; 2 et $\sqrt{3}$.

2. Calculez l'image du nombre $\sqrt{t}$ ($t > 0$).

13 La courbe représente une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.



1. Donnez une valeur approchée de l'image de 12 et de -6.

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 2x^2 - 16x - 168.$$
a) Calculez l'image de 12 et l'image de -6.

b) Ces valeurs confirment-elles la réponse à la question **1.** ?

OBJECTIF 3 Résoudre l'équation $f(x) = k$. Chercher les antécédents de k

f est une fonction. D est son ensemble de définition, k est un nombre donné.

- **Résoudre l'équation $f(x) = k$**, c'est trouver tous les nombres x de l'ensemble D qui ont pour image le nombre k.
- Les nombres x, solutions de l'équation, sont les antécédents de k.

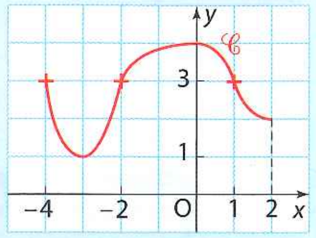
EXERCICE RÉSOLU D

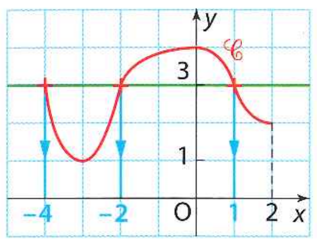
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 5$.
g est la fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 2]$ par sa représentation graphique $\mathscr{C}$ ci-contre.

1. Résolvez algébriquement l'équation $f(x) = -7$.

2. Résolvez graphiquement l'équation $g(x) = 3$.

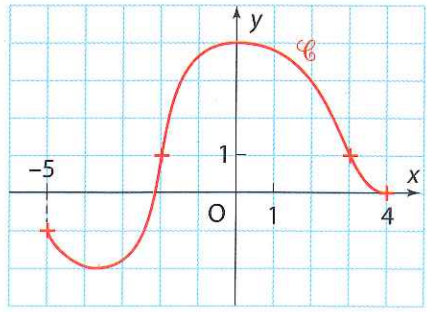
3. Pour chacune des deux fonctions, déterminez les antécédents de 6.



Méthode	Solution
1. On résout l'équation $f(x) = -7$.	**1.** Pour tout réel x, $f(x) = -7$ équivaut à : $-4x + 5 = -7$; $-4x = -12$; $x = \frac{-12}{-4}$; $x = 3$.
• On vérifie que les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble de définition de f. Ici, cet ensemble est $\mathbb{R}$.	3 est dans l'ensemble de définition de f (l'ensemble $\mathbb{R}$).
• On conclut.	Donc l'équation $f(x) = -7$ a pour solution $x = 3$.
2. On repère 3 sur l'axe des ordonnées. Par ce point, on trace la parallèle à l'axe des abscisses : on repère les points d'intersection de cette droite avec la courbe.	**2.**  Trois points de la courbe ont pour ordonnée 3.
• On lit les abscisses des points d'intersection.	Les abscisses de ces points sont –4, –2 et 1.
• On conclut.	L'équation $g(x) = 3$ a trois solutions –4, –2 et 1.
3. Trouver les antécédents de 6 par f, c'est résoudre $f(x) = 6$. On procède alors comme à la question **1.**, puisque l'on dispose d'une formule définissant $f(x)$.	**3.** • $f(x) = 6$ équivaut à $-4x + 5 = 6$, donc à $-4x = 1$, soit $x = -\frac{1}{4}$. Ce nombre est bien dans l'ensemble de définition de f. Donc 6 a pour antécédent $-\frac{1}{4}$.
• On résout $g(x) = 6$. Cette résolution est graphique puisque g est définie par une courbe.	• Il n'existe pas de points de la courbe qui ont 6 pour ordonnée. Donc 6 n'a pas d'antécédent par g.

Mise en pratique

14 $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5 ; 4]$.



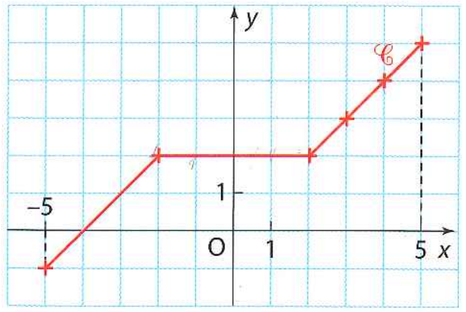
1. Résolvez graphiquement les équations :
a) $f(x) = 1$;
b) $f(x) = -1$;
c) $f(x) = 0$.

2. Cherchez les antécédents de 3 par f.

15 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 8x + 3$$
et
$$g(x) = -5x - 7.$$
Calculez les antécédents de 5 et –2 par f et g.

16 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{5}x - 3$$
et
$$g(x) = \frac{3}{8}x + 5.$$
Calculez les antécédents de 2 et –3 par f et g.

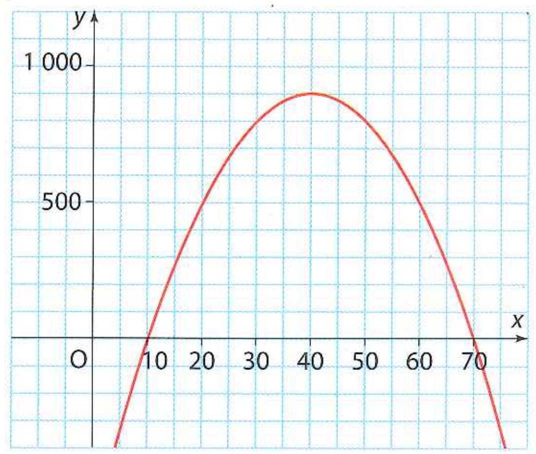
17 $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$.



1. Résolvez graphiquement les équations :
a) $f(x) = -1$;
b) $f(x) = 2$;
c) $f(x) = 4$.

2. Cherchez les antécédents de 3 par f.

18 $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.



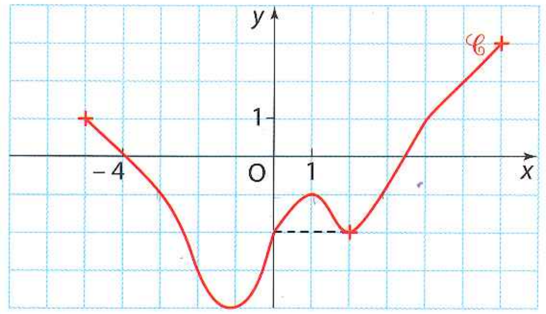
1. Donnez par lecture graphique les antécédents de 0 par h.

2. La fonction h est définie par :
$$h(x) = (x - 10)(70 - x).$$
a) Cherchez les antécédents de 0 par h.

Revoir les bases
A et B sont deux nombres.
$AB = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

b) Ces résultats confirment-ils les réponses trouvées à la question **1.** ?

19 La courbe représente une fonction f.



1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Quel est le nombre de solutions de chaque équation ?
a) $f(x) = -2$;
b) $f(x) = 1$;
c) $f(x) = 2$;
d) $f(x) = 4$.
(On ne demande pas de trouver les solutions, seulement de préciser leur nombre, qui peut être zéro.)

EXERCICES

OBJECTIF 4 Résoudre graphiquement une inéquation

- **Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant b$**, c'est chercher les nombres x qui ont une image supérieure ou égale à b.
- Graphiquement, cela revient à trouver les points de la courbe qui ont une ordonnée supérieure ou égale à b.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant b$ sont les abscisses de ces points.

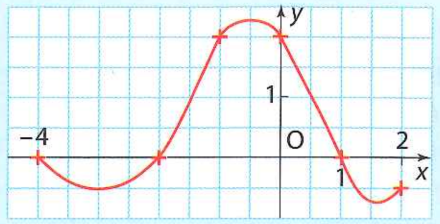
EXERCICE RÉSOLU E

Animation

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 2]$.

1. Résolvez l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.

2. Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$.



Méthode

1. On cherche tous les points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 2.
On repère 2 sur l'axe des ordonnées. Par ce point, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses.
Elle coupe la courbe aux points d'abscisses −1 et 0.
Les points cherchés sont coloriés en bleu sur la courbe : ils sont au-dessus de la droite **et** sur la droite.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ se lisent sur l'axe des abscisses.

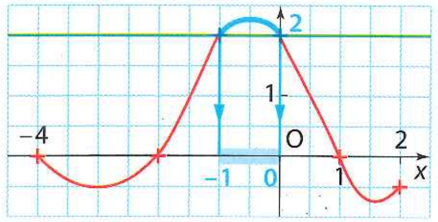
2. On procède de même : on cherche les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement inférieure à 0.

Attention : il faut penser à exclure les points dont l'ordonnée est égale à 0.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ se lisent sur l'axe des abscisses.
- On utilise le symbole ∪ (« union »).

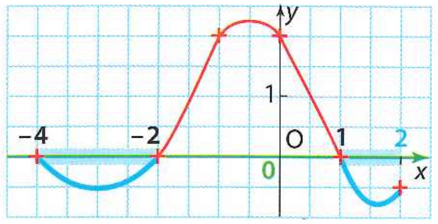
Solution

1.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ sont les nombres de l'intervalle $[-1 ; 0]$: $\mathcal{S} = [-1 ; 0]$.

2.

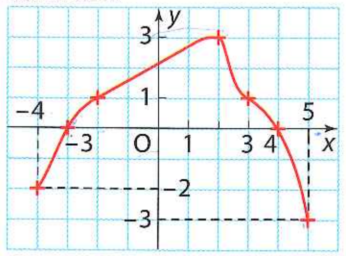


Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont tous les nombres x de l'intervalle $]-4 ; -2[$ **ou** de l'intervalle $]1 ; 2]$:

$$\mathcal{S} =]-4 ; -2[\cup]1 ; 2].$$

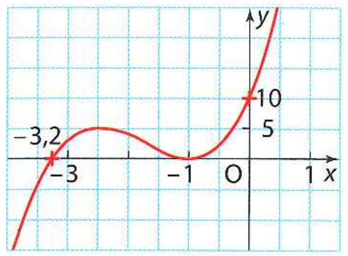
Mise en pratique

20 La courbe est la représentation graphique d'une fonction f.



Résolvez l'inéquation $f(x) \geqslant 1$, puis l'inéquation $f(x) < 0$.

21 La fonction f représentée est définie sur $\mathbb{R}$.



1. Résolvez l'inéquation $f(x) \geqslant 10$.

2. Résolvez la double inéquation : $0 \leqslant f(x) < 10$.

EXERCICES

OBJECTIF 5 Savoir si un point est ou non sur une courbe représentative

f est une fonction, D est son ensemble de définition, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.
Étant donné un point M de coordonnées $(a ; b)$ avec a dans D :

- **si M appartient à $\mathcal{C}$**, alors $b = f(a)$;
- réciproquement, **si $b = f(a)$**, alors M appartient à $\mathcal{C}$;
- **si $b \neq f(a)$**, alors M n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

EXERCICE RÉSOLU F

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{2x+1}$, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.
Les points A(2 ; 9) et B(0 ; 5) appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?

Méthode

Pour savoir si un point M$(a ; b)$ appartient à $\mathcal{C}$, on calcule $f(a)$ et on le compare à b.

- Pour A, on calcule $f(2)$.
- On conclut selon la valeur de $f(2)$.
- Pour B, on calcule $f(0)$.
- On conclut.

Solution

- $f(2) = \dfrac{5}{2 \times 2 + 1} = \dfrac{5}{5} = 1.$

Or $f(2) \neq 9$, donc A $\notin \mathcal{C}$.

Notation
$\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

- $f(0) = \dfrac{5}{2 \times 0 + 1} = \dfrac{5}{1} = 5.$

L'ordonnée de B est égale à $f(0)$, donc B $\in \mathcal{C}$.

Notation
$\in$ signifie « appartient à ».

Mise en pratique

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x - 5.$$
Les points suivants sont-ils des points de la courbe représentative de f ?

- A(−2 ; 9)
- B(3 ; 1)
- C$\left(\dfrac{1}{2} ; -4\right)$

23 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+12}{4}$$
et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

1. Les points O(0 ; 0) et A(2 ; 4) sont-ils des points de $\mathcal{C}$?

2. B est un point de $\mathcal{C}$ et son abscisse est égale à −4.
Quelle est l'ordonnée de B ?

3. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 0 ?

24 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + x - 2$$
et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

1. Le point A$\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{5}{4}\right)$ est-il un point de $\mathcal{C}$?

2. La courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 ?

25 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On sait que :

1. $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées (−5 ; 2) ;
2. $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée −1 ;
3. $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse −2.

Déduisez de chacune de ces données une égalité $b = f(a)$, en précisant les nombres a et b.

OBJECTIF 6 Passer de la courbe au tableau de variation, du tableau à une courbe

Dresser le tableau de variation d'une fonction f, c'est indiquer les plus grands intervalles sur lesquels f est :

– soit strictement croissante,

– soit strictement décroissante,

– soit constante.

→ *exercice résolu G*

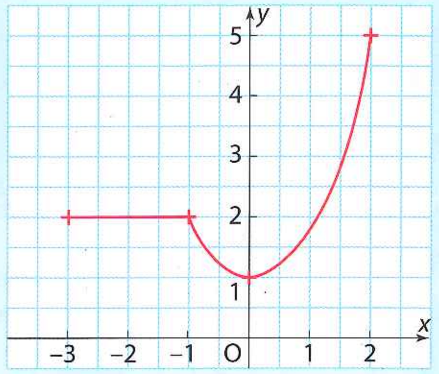
EXERCICE RÉSOLU G Dresser un tableau de variation

Animation

La courbe est la représentation graphique d'une fonction f.

1. Précisez son ensemble de définition.

2. Dressez son tableau de variation.



Méthode

1. L'ensemble de définition se lit sur l'axe des abscisses : c'est l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe.

2. On regarde « l'allure » de la courbe de la gauche vers la droite.

• Elle est « horizontale » lorsque x varie de -3 à -1 ; au-delà, elle ne l'est plus. Donc f est constante sur $[-3\,;-1]$.
On place -3 et -1 sur la première ligne du tableau et, en dessous, on place leurs images : $f(-3) = 2$ et $f(-1) = 2$.
Par une flèche horizontale, on indique que f est constante.

• La courbe « descend » lorsque x varie de -1 à 0. Donc f est strictement décroissante sur $[-1\,;0]$. On l'indique par une flèche descendante, après avoir placé 0 et $f(0) = 1$.

• Ensuite, la courbe « monte » lorsque x varie de 0 à 2. f est strictement croissante.
On l'indique par une flèche « montante », après avoir placé 2 et $f(2) = 5$.

Solution

1. La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\,;2]$.

2.

x	-3		-1
f	2	→	2

x	-3		-1		0
f	2	→	2	↘	1

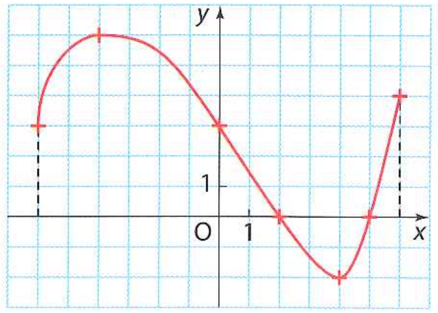
x	-3		-1		0		2
f	2	→	2	↘	1	↗	5

Remarque
Dans la rédaction d'une solution, on ne présente que le tableau final.

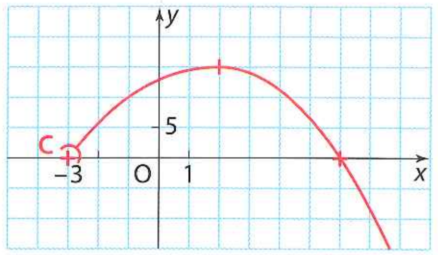
Mise en pratique

Pour les exercices 26 et 27
On donne la représentation graphique d'une fonction f. Précisez l'ensemble de définition puis dressez le tableau de variation de f.

26

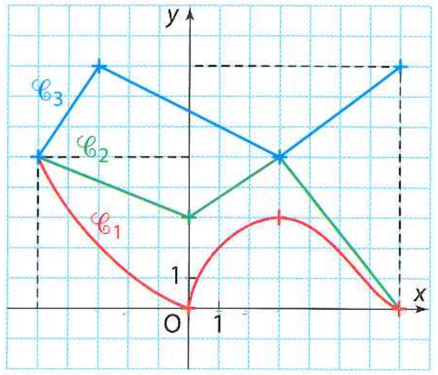


27



Aide
La courbe est limitée à gauche par le point $C(-3\,;0)$. Mais, à droite, elle ne l'est pas. Dans ce cas, f est définie sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.

28 Attribuez à chaque courbe son tableau de variation.



A

x	-5		-3		3		7
f	5	↗	8	↘	5	↗	8

B

x	-5		0		3		7
g	5	↘	0	↗	3	↘	0

C

x	-5		0		3		7
h	5	↘	3	↗	5	↘	0

29 Voici deux tableaux de variation trouvés dans des copies d'élèves.
Ils ont commis des erreurs. Retrouvez-les.

a)

x	1		3		5		10
$f(x)$	-4	↗	2	↘	$\frac{9}{4}$	↗	1,5

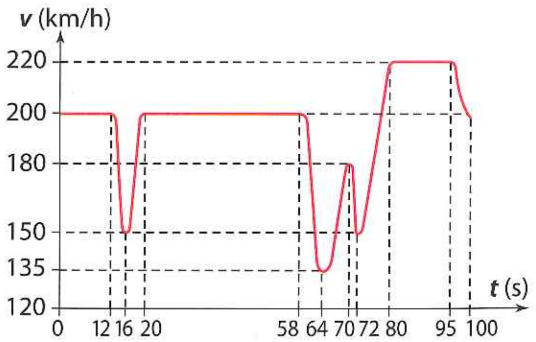
b)

x	-2		$\frac{5}{2}$		2		8
g	3	↗	2	↘	1	↗	26

30 Automobile sur un circuit

Lors d'un rallye de formule 1, une automobile parcourt un circuit. À partir d'un instant pris comme origine, on a enregistré les variations de sa vitesse v (exprimée en km/h) en fonction du temps t (en secondes).

On a obtenu la courbe ci-dessous représentant la fonction $t \mapsto v$.



Dressez le tableau de variation de la fonction v sur $[0\,;100]$.

EXERCICE RÉSOLU H Tracer une courbe à partir d'un tableau de variation

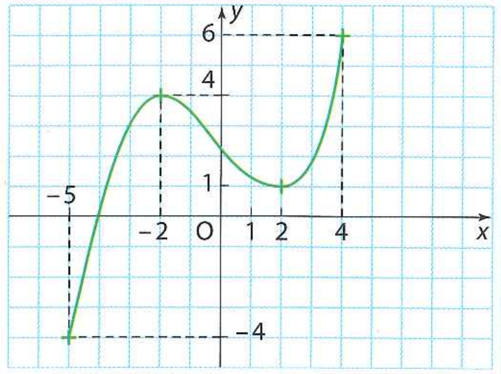
Tracez une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation.

x	-5		-2		2		4
f	-4	↗	4	↘	1	↗	6

Méthode

- Les nombres de la première ligne sont des abscisses des points de la courbe, ceux de la deuxième ligne sont les ordonnées correspondantes.
- On place les points de coordonnées $(-5\,;-4)$, $(-2\,;4)$, $(2\,;1)$ et $(4\,;6)$ dans un repère, car ces points sont sur la courbe représentative de f.
- On trace une courbe passant par ces points et respectant les variations de f.

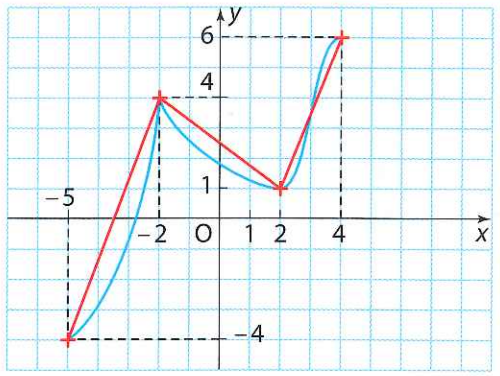
Solution



Remarque

Il peut y avoir d'autres courbes puisqu'on ne connaît pas les valeurs de $f(x)$ pour tout x dans $[-5\,;4]$. Deux fonctions peuvent avoir le même tableau de variation sans pour autant être égales.

Les courbes ci-contre correspondent elles aussi au tableau de variation donné plus haut.



Mise en pratique

31 Précisez l'ensemble de définition de f, puis tracez une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation.

x	-5		-1		3		4
f	3	↘	0	↗	4	↘	0

32 Précisez l'ensemble de définition de f, puis tracez une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation.

x	$-\infty$		-2		0		1		3		9
f		↘	-3	↗	-1	↗	4	↘	0	↘	-2

33 Tracez une courbe susceptible de représenter la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;10]$ à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

x	$-\infty$		-2		3		10
f		↗	5	↘	-3	↗	0

- $f(-4)=2$; $f(-6)=-1$.
- La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1.
- Pour tout nombre $x<0$, $f(x)\geqslant -2$.

OBJECTIF 7 Utiliser un tableau de variation

- Si une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I, elle « conserve l'ordre » :
$a<b$ implique $f(a)<f(b)$.
- Si elle est strictement décroissante sur I, elle « inverse l'ordre » :
$a<b$ implique $f(a)>f(b)$.

→ exercice résolu J

- Le **maximum** M d'une fonction f sur l'intervalle I est la plus grande des images prises sur I :
pour tout x de I, $f(x)\leqslant$ M.
- Le **minimum** m de f sur I est la plus petite des images sur I : pour tout x de I, $f(x)\geqslant m$.

→ exercice résolu I

EXERCICE RÉSOLU I Maximums, minimums

Le tableau de variation est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $I=[-5\,;5]$.

x	-5		-2		1		5
f	1	↘	0	↗	2	↘	-3

1. a) Précisez le minimum et le maximum de f sur I.

b) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout nombre x de I, $-3\leqslant f(x)\leqslant 2$?

2. Complétez le plus précisément possible les inégalités :

a) Si $-5\leqslant x\leqslant 1$, alors $\dots\leqslant f(x)\leqslant\dots$

b) $\dots<f(-3{,}5)<\dots$

Méthode

1. a) Minimum de f sur I : on repère dans le tableau la plus petite valeur de f sur I.
Maximum de f sur I : on repère la plus grande valeur de f sur I.

b) On utilise la définition du minimum et celle du maximum.

Vocabulaire

On dit alors que $f(x)$ est encadré par les nombres -3 et 2.

2. a) $-5\leqslant x\leqslant 1$ signifie que x est dans l'intervalle $[-5\,;1]$. On lit le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

b) On place $-3{,}5$ sur la première ligne du tableau. On voit que $-3{,}5\in[-5\,;-2]$.

- On repère le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

Solution

1. a) Le minimum de f sur I est -3, il est atteint lorsque $x=5$.
Le maximum de f sur I est 2, il est atteint lorsque $x=1$.

b) Donc, pour tout x de I :
$-3\leqslant f(x)$ et $f(x)\leqslant 2$.
Donc, pour tout x de I :
$-3\leqslant f(x)\leqslant 2$.

2. a) Sur $[-5\,;1]$, le minimum de f est 0 et son maximum est 2.
Donc $\mathbf{0\leqslant f(x)\leqslant 2}$.

x	-5		-2		1		5
f	1	↘	0	↗	2	↘	-3

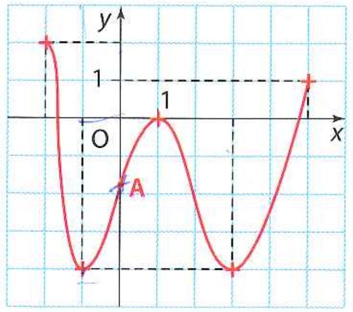
b) $-3{,}5\in[-5\,;-2]$.

x	-5	$-3{,}5$	-2		1		5
f	1	↘	0	↗	2	↘	-3

Le minimum de f sur $[-5\,;-2]$ est 0 et son maximum est 1.
Donc $\mathbf{0\leqslant f(-3{,}5)\leqslant 1}$.

Mise en pratique

34 f est définie par sa courbe représentative.



1. Précisez le minimum et le maximum de f sur son ensemble de définition.

2. Le point $A\left(0\,;-\dfrac{7}{4}\right)$ appartient à la courbe.

Précisez le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

35 f est une fonction définie sur l'intervalle $I=[-10\,;25]$.
Son tableau de variation est :

x	-10		0		11		20		25
f	-40	↗	35	↘	12	↗	15	↘	-68

1. Précisez le minimum et le maximum de f sur I.

2. Précisez le minimum et le maximum de f sur $[-10\,;11]$.

3. Complétez le plus précisément possible les inégalités :

a) ...... $\leqslant f(-2) \leqslant$ ......

b) ...... $\leqslant f(2) \leqslant$ ......

36 Le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		-1		2		8		15		22		$+\infty$
f		↗	-3	↘	-10	↗	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↘	

1. a) Quel est le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty\,;8]$?

b) Quel est le signe de $f(x)$ sur cet intervalle ?

2. a) Si $x \geqslant 22$, que peut-on dire du signe de $f(x)$?

b) Quel est le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

Déduisez-en que l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

37 Le tableau de variation d'une fonction f est :

x	-3		-2		1		4
f	5	↘	0	↗	2	↘	-1

1. Alice affirme : « D'après ce tableau de variation, $f(3) \leqslant 0$ ».
Alice a tort. Justifiez pourquoi.

2. Est-il vrai que la courbe représentative de f rencontre l'axe des abscisses en deux points ? Justifiez votre réponse.

38 On donne le tableau de variation d'une fonction g.

x	-6		-4		-1		0		2		7
g	-4	↗	2	↗	8	↘	2	↘	-2	↗	1

1. Combien 0 possède-t-il d'antécédents ?

2. Résolvez l'inéquation $g(x) \geqslant 2$.

39 Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-9		-2		0		1		3		$+\infty$
f	-3	↘	-5	↗	-1	↗	4	↘	-1	↘	

1. Combien 4 a-t-il d'antécédents par f ?

2. Complétez les inégalités suivantes le plus précisément possible :

a) ...... $\leqslant f(2) \leqslant$ ......

b) ...... $\leqslant f(-1) \leqslant$ ......

3. Existe-t-il un nombre de l'intervalle $[-9\,;-2]$ dont l'image est -1 ?

4. Résolvez l'inéquation $f(x) \leqslant -1$.

40 On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-8		0		3		$+\infty$
f		↗	6	↘	-2	↗	0	↘	

Complétez le tableau suivant.

	appartient à $\mathscr{C}$	peut appartenir à $\mathscr{C}$	n'appartient pas à $\mathscr{C}$
A(6 ; −8)			
B(0 ; −2)			
C(−4 ; 7)			

EXERCICE RÉSOLU J Sens de variation d'une fonction

Animation

Le tableau de variation est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-5\,;5]$.

x	-5		-2		1		5
f	1	↘	0	↗	2	↘	-3

1. a et b sont deux nombres tels que $-5 \leqslant a < b \leqslant -2$.
Comparez $f(a)$ et $f(b)$.

2. a et b sont deux nombres tels que $-2 \leqslant a < b \leqslant 1$.
Comparez $f(a)$ et $f(b)$.

Méthode

Il s'agit de savoir si $f(a) < f(b)$ ou si $f(a) > f(b)$ ou si $f(a) = f(b)$.

1. On place a et b dans la 1re ligne du tableau.
On s'assure que a et b sont dans l'un des intervalles délimités par le tableau. Ici, cet intervalle est $[-5\,;-2]$.

- On regarde le sens de variation de f sur $[-5\,;-2]$.

- On conclut.

2. On procède comme à la question **1.**

Solution

1. a et b sont dans l'intervalle $[-5\,;-2]$ et $a < b$.

x	-5	a	b	-2		1		5
f	1	$f(a)$	$f(b)$	0	↗	2	↘	-3

f est strictement décroissante sur $[-5\,;-2]$ et $a < b$, donc $f(a) > f(b)$.

2. a et b sont dans $[-2\,;1]$ et $a < b$.

x	-5		-2	a	b	1		5
f	1	↘	0	$f(a)$	$f(b)$	2	↘	-3

f est strictement croissante sur $[-2\,;1]$ et $a < b$, donc $f(a) < f(b)$.

Mise en pratique

41 f est une fonction définie sur $I = [-6\,;10]$ et son tableau de variation est :

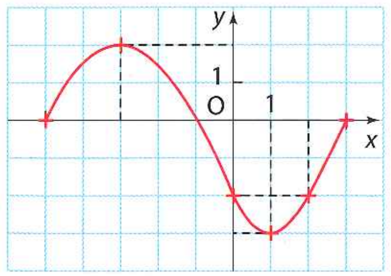
x	-6		2		10
f	5	↗	8	↘	-4

1. Justifiez que $f(-3) < f(1)$ et que $f(3{,}001) > f(3{,}002)$.

2. a et b sont deux nombres réels tels que :
$$-6 \leqslant a < b \leqslant 2.$$
Comparez $f(a)$ et $f(b)$.

3. Reprenez la question **2.** avec $2 \leqslant a < b < 10$.

42 f est définie par sa représentation graphique.



1. Justifiez que $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < f\left(\dfrac{9}{4}\right)$.

2. a et b sont deux réels tels que :
$$-1 \leqslant a < b \leqslant 1.$$
Comparez $f(a)$ et $f(b)$.

3. Quel est le plus grand intervalle sur lequel f est décroissante ?

43 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;10]$ et son tableau de variation est :

x	-5		-3		0		5		10
f	-1	↗	5	↘	-2	↗	3	↘	1

Dites si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

a) $f(1) > f(4)$.

b) $f(-3) > f(-1)$.

c) $f(-4) < 5$.

d) Si $x \in [5\,;10]$, alors $f(x) > 0$.

e) Si $f(2) = 0$, alors $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

Pour se tester

Exercices interactifs

44 Questions sur le cours

Complétez avec un ou plusieurs mots.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = 2x^2 - 5$.

a) $[-4\ ;\ 3]$ s'appelle .... de f.

b) Le nombre $2x^2 - 5$ s'appelle .... de x.

c) Chercher les antécédents de 2 revient à résoudre l'équation ....

d) Dire que -5 est le minimum de f sur $[-4\ ;\ 3]$ signifie que, pour tout nombre x de $[-4\ ;\ 3]$:
$f(x)$ ....

45 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

La fonction f est définie sur $[-3\ ;\ 3]$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x-4}$.

a) Le point M$(-1\ ;\ 0{,}6)$ appartient à la représentation graphique de f.

b) L'image de -3 par f est égale à 1,28.

c) Si h est une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I, alors h est décroissante sur I.

46 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Parmi les trois fonctions suivantes, celle qui est strictement croissante sur $[-1\ ;\ 1]$ est :
a) $f(x) = 1 - x$ **b)** $g(x) = x^2$ **c)** $t(x) = x + 1$

2. f est une fonction décroissante sur $[-4\ ;\ 6]$.
a) $f(-3) \leqslant f(2)$ **b)** $f(2) \geqslant f(5)$
c) Si $-4 \leqslant u < v \leqslant 6$, alors $f(u) \leqslant f(v)$.
d) $f(6)$ est le maximum de f sur $[-4\ ;\ 6]$.

3. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.
a) Le point A$(5\ ;\ 0{,}23)$ est sur $\mathscr{C}$.
b) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0.
c) Le point B$(0\ ;\ -2)$ est au-dessus de $\mathscr{C}$.
d) Le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 a pour ordonnée 0,6.

47 QCM Plusieurs réponses exactes

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

On donne le tableau de variation de la fonction h.

x	-6	-3	0	7	10
h	4 ↗	8 ↘	-7 ↗	-5 ↘	-6

1. a) Le nombre 8 possède un seul antécédent par h.
b) Le nombre 0 est un antécédent de -7 par h.
c) Si $x > 0$, alors $h(x) < 0$.
d) $h(-4) > h(3)$.

2. a) Le minimum de la fonction h est -6.
b) Le nombre -5 possède exactement deux antécédents par h.
c) La fonction h atteint son maximum pour $x = -3$.
d) 10 n'a pas d'antécédent par h.

3. La fonction g est définie et strictement décroissante sur $[-4\ ;\ +\infty[$.
a) $g(0) < g(5)$.
b) Si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$.
c) La fonction g atteint son maximum pour $x = -4$.
d) Il peut y avoir une flèche horizontale dans le tableau de variation de g.

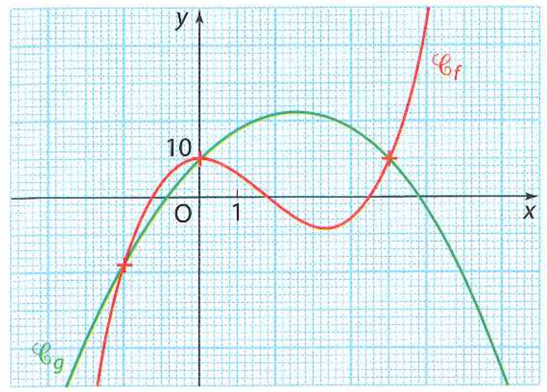
4. f est une fonction. Il est possible que :
a) un nombre ait plusieurs antécédents par f ;
b) un nombre ait plusieurs images par f ;
c) deux nombres différents aient la même image par f ;
d) deux nombres différents aient le même antécédent par f.

Voir les corrigés p. 276

Apprendre à chercher

48 Résoudre une équation $f(x) = g(x)$

Les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont données ci-dessous.



Objectif Résoudre graphiquement l'équation :
$f(x) = g(x)$.

1. Puisque l'on veut faire une résolution graphique, il s'agit de faire le lien entre les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ et les courbes.

Par définition, $\mathscr{C}_f$ est l'ensemble des points M$(x\ ;\ f(x))$ et $\mathscr{C}_g$ celui des points N$(x\ ;\ g(x))$.

Ainsi, dire que $f(a) = g(a)$ revient à dire que le point A$(a\ ;\ f(a))$ est commun aux deux courbes.

Repérez les points d'intersection entre les deux courbes.

2. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses de ces points. Vous pouvez retenir ce résultat et l'utiliser.

Déduisez-en les solutions de l'équation.

3. On donne les expressions de f et g :
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10$ et $g(x) = -2x^2 + 10x + 10$.

Contrôlez vos réponses à la question **2.**

Mise en pratique : exercices 75, 76 et 78

49 Résoudre une inéquation $f(x) \geqslant g(x)$

Les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont données ci-après.

Objectif Résoudre graphiquement l'inéquation :
$f(x) \geqslant g(x)$.

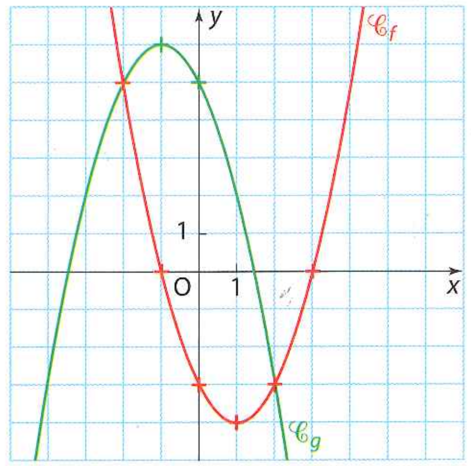
1. Dire que x est solution de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ revient à dire que le point M$(x\ ;\ f(x))$ est situé au-dessus du point N$(x\ ;\ g(x))$ ou qu'il est confondu avec ce point.

Repérez les points de la courbe de la fonction f situés au-dessus de ceux de la courbe de la fonction g.

2. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses de ces points.

a) Repérez les abscisses de ces points.

b) Déduisez-en les solutions de l'inéquation.
(Utilisez les notations avec les intervalles.)



Mise en pratique : exercices 75, 76, 78 et 79

50 Démontrer une égalité

Dans chaque cas, on donne l'écriture de A(x) et B(x).

Objectif Démontrer que, pour tout nombre x :
A(x) = B(x).

1er cas : $A(x) = (x+2)^2 - 3(x+1)$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.

a) Une méthode consiste à transformer l'écriture de l'un en espérant retrouver celle de l'autre. L'écriture de B(x) étant déjà réduite, on transforme alors l'écriture de A(x).

Développez A(x). Réduisez l'expression obtenue.

b) Concluez.

2e cas : $A(x) = 4(x-1)^2 - 9$ et $B(x) = (2x-5)(2x+1)$.

a) On procède comme au premier cas.

Développez puis réduisez A(x).

b) Cette fois, on ne retrouve pas l'écriture de B(x). On pense alors à transformer l'écriture de B(x).

Développez puis réduisez B(x).

c) Concluez.

Raisonnement
On a utilisé le fait que si A = C et B = C, alors A = B.

Mise en pratique : exercice 77

Utiliser sa calculatrice

→ Pour calculer les valeurs approchées d'une fonction
→ Pour résoudre une équation

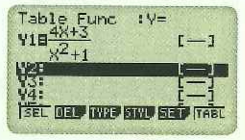
51 Utiliser les fonctionnalités liées aux fonctions

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

1. a) Faites afficher le tableau de valeurs de la fonction f, pour x variant de -5 à 6, avec un pas de 0,5.
b) À l'aide de ce tableau de valeurs, donnez l'arrondi à 10^{-4} près de $f(-4{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(0{,}5)$; $f(2{,}5)$.
2. a) Faites afficher la courbe représentative de la fonction f, pour x compris entre -7 et 8.
b) Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

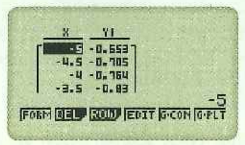
Avec une Casio

1. a) • Allez dans le menu TABLE puis entrez l'expression de f dans Y1 :
(4 X,θ,T + 3) ÷ (X,θ,T x² + 1) EXE

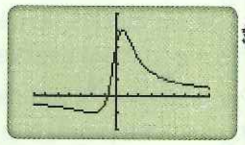


• Utilisez la fonction SET (F5) pour paramétrer l'affichage du tableau de valeurs.
Appuyez sur EXE pour valider votre choix.

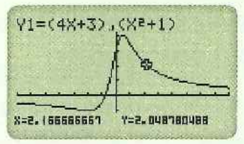
• Sélectionnez la fonction TABL (F6).



2. a) Sélectionnez le menu GRAPH puis SHIFT F3 (V-Window). Paramétrez l'affichage de la fenêtre pour que x soit compris entre -7 et 8.
Appuyez sur EXE EXE.

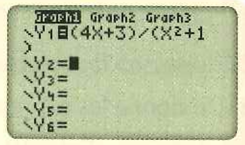


b) Sélectionnez la fonction TRACE de la calculatrice avec SHIFT F1 pour lire les valeurs approchées des abscisses des points cherchés.



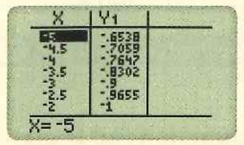
Avec une TI

1. a) Appuyez sur f(x) puis entrez l'expression de f dans Y1:
(4 x,t,θ,n + 3) ÷ (x,t,θ,n x² + 1) entrer

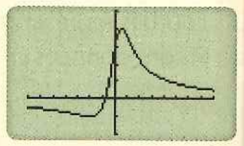


• Tapez 2nde fenêtre (déf table) pour paramétrer l'affichage du tableau de valeurs.

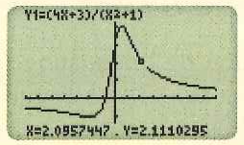
• Tapez 2nde graphe (table).



2. a) Appuyez sur la touche fenêtre.
Paramétrez l'affichage de la fenêtre pour que x soit compris entre -7 et 8. Appuyez sur graphe.



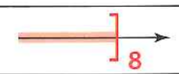
b) Appuyez sur trace pour lire les valeurs approchées des abscisses des points cherchés.



INTERVALLES

52 Complétez à l'aide des symboles $\in$ ou $\notin$:
a) 3 ...... $[-1\,;5] \cup [10\,;+\infty[$.
b) -8 ...... $]-\infty\,;-9] \cup [0\,;3]$.
c) 7 ...... $]0\,;7[\cup [2\,;20[$.

53 Recopiez et complétez le tableau suivant.

Inégalité	Représentation sur un axe gradué	Intervalle
$-5 \leqslant x < 2$		
		
		$x \in]-5\,;+\infty[$

54 Sur une droite graduée, coloriez les nombres vérifiant la condition indiquée, puis décrivez cet ensemble en utilisant les intervalles.
a) $y > 5$ et $y \geqslant 0$;
b) $y \leqslant 3{,}5$ et $y > -1{,}9$;
c) $y > 5$ ou $y \leqslant 0$;
d) $y > 2$ ou $y \leqslant -2$.

Attention
La réunion de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle.

55 Simplifiez les notations suivantes lorsque c'est possible.
a) $[-5\,;7[\cup [-2\,;12[$.
b) $[0\,;+\infty[\cup]-2\,;+\infty[$.
c) $]-\infty\,;0[\cup [0\,;+\infty[$.

56 Le « ou » en mathématique LOGIQUE

I et J sont deux intervalles et x est un nombre qui est dans I **ou** dans J.

En langage usuel, cela signifie que : ou bien x est dans I, ou bien x est dans J mais pas dans les deux.

En mathématique, le **ou** n'exclut pas : x peut être à la fois dans I et dans J. Ainsi :
– x peut être dans I mais pas dans J ;
– x peut être dans J mais pas dans I ;
– x peut être dans I et dans J.

1. Représentez sur une droite graduée l'ensemble des nombres x qui appartiennent à l'intervalle $I = [-10\,;3]$ **ou** à l'intervalle $J = [2\,;4]$.

2. Pourquoi l'énoncé « $ab = 0$ seulement lorsque $a = 0$ et $b = 0$ » est-il faux ? Corrigez-le pour qu'il soit vrai.

3. a) n est un entier naturel pair *et* multiple de 3.
Donnez cinq valeurs possibles pour n.
b) n est un entier naturel pair *ou* multiple de 3.
Les nombres suivants sont-ils des valeurs possibles pour n : 4, 5, 6, 9, 22, 36, 39 ?

57 Appartenance, inclusion LOGIQUE

1. Vrai ou faux ?
a) Si $x \in [6{,}7\,;+\infty[$ alors $x \in [6\,;+\infty[$.
b) Si $x \in]-3\,;4[$ alors $x \in [-2\,;5]$.
2. L'intervalle $]0\,;4[$ est-il inclus dans l'intervalle $[0\,;4[$?
3. Donnez trois intervalles distincts inclus dans l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

NOTION DE FONCTION

58 Parmi les fonctions suivantes, indiquez celles pour lesquelles l'image de 0 est 3, puis celles pour lesquelles un antécédent de 5 est 1.
a) $f_1 : x \mapsto 2x+3$
b) $f_2 : x \mapsto 2x^2 - x + 3$
c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{22x+3}$
d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{20}{x+3}$

59 f est la fonction définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.
1. Calculez les images de $3+\sqrt{5}$ et de $\dfrac{7}{3}$ par f.
2. Calculez $g(-2)$ et $g(1-\sqrt{2})$.

60 Avec la calculatrice

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;5[$ par :
$$f(x) = \frac{4x}{x-5}.$$
1. Faites afficher à l'écran de la calculatrice le tableau de valeurs de la fonction f, pour x variant de -4 à -1, avec un pas de 0,2.
2. Complétez à l'aide de la valeur approchée fournie par la calculatrice :
$f(-2{,}8) \approx$ ...... $f(-1{,}6) \approx$ ......
3. À l'aide de ce tableau, déterminez les nombres a et b tels que :
$$f(a) = 1{,}5 \quad \text{et} \quad f(b) = 0{,}875.$$

61 Avec la calculatrice

f est la fonction définie sur $[-6\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x+6}.$$
1. Avec la calculatrice, déterminez les images par f des nombres x donnés dans le tableau ci-après.
2. Corrigez les valeurs approchées à 10^{-1} qui sont erronées dans la deuxième ligne de ce tableau.

x	16	21	26	31	36	41	46	51
$f(x)$	4,7	5,2	5,3	5,7	6,5	6,7	7,2	7,9

62 Chacune des phrases suivantes définit une fonction. Précisez pour chacune l'écriture de $f(x)$ et dites pour quelles valeurs de x le calcul de $f(x)$ est possible.

1. À tout nombre, on associe le triple de son carré.

2. À tout nombre strictement inférieur à 3, on associe l'inverse de la différence entre ce nombre et 3.

3. À tout nombre non nul, on associe la somme de son inverse et de 3.

63 Ensemble de définition

1. a) Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.

b) Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geqslant 0$.

2. Parfois, on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g. Dans ce cas, on convient que l'ensemble de définition de g est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.

Déduisez de la question **1.** l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $g : x \mapsto \dfrac{1}{8x-4}$

b) $h : x \mapsto \sqrt{8x-4}$

Aide

$g(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{B}$. Pour que $g(x)$ existe, il faut et il suffit que $B \neq 0$.

$h(x)$ est de la forme $\sqrt{C}$. Pour que $h(x)$ existe, il faut que $C \geqslant 0$.

64 Fonction définie par morceaux ALGORITHMIQUE

L'algorithme suivant, écrit avec Algobox, traduit un programme de calcul définissant une fonction f. (pow(x,2) signifie x^2 et sqrt(x) signifie $\sqrt{x}$.)

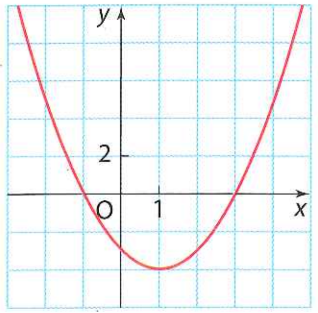
```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  SI (x<-2) ALORS
    DEBUT_SI
    y PREND_LA_VALEUR -2*x+1
    FIN_SI
  SI (x>=-2 ET x<4) ALORS
    DEBUT_SI
    y PREND_LA_VALEUR pow(x,2)+1
    FIN_SI
  SI (x>=4) ALORS
    DEBUT_SI
    y PREND_LA_VALEUR sqrt(x)+15
    FIN_SI
  AFFICHER "f(x)="
  AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

1. Faites tourner cet algorithme lorsque $x = -4$, $x = 1$ puis $x = 3$.

2. Est-il vrai que si $x < -4$, alors $f(x) = -2x + 1$?

3. x est un nombre de l'intervalle $[5 ; 12]$.
Exprimez $f(x)$ en fonction de x.

65 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^2 - 2x - 3$. La courbe représentative de la fonction k est donnée ci-dessous.



1. a) Déterminez graphiquement les antécédents de zéro.

b) Confirmez par le calcul que les valeurs trouvées à la question **1. a)** sont exactes.

2. Résolvez graphiquement l'inéquation $k(x) \geqslant 0$.

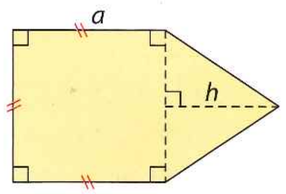
3. Déduisez des questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

66 Quantificateurs LOGIQUE

Reliez chaque phrase 1, 2, 3 à la phrase A, B, C qui a la même signification.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 1$.	1	**A** Existe-t-il des nombres x pour lesquels $g(x)$ et $3x^2 + 1$ sont égaux ?
L'équation $g(x) = 3x^2 + 1$ a-t-elle des solutions ?	2	**B** Pour tout nombre x, l'image de x par la fonction g est $3x^2 + 1$.
Résolvez l'équation $g(x) = x$.	3	**C** Déterminez l'ensemble de tous les nombres pour lesquels $g(x)$ et x sont égaux.

67 Un polygone est formé d'un carré de côté a et d'un triangle isocèle de hauteur h comme l'indique la figure ci-contre.



1. Prouvez que l'aire $\mathcal{A}$ de ce polygone est égale à :

$$a^2 + \frac{1}{2}ah.$$

2. On fixe $a = 4$ cm et h ne doit pas dépasser 7 cm. L'aire $\mathcal{A}$ est fonction de h. On note $\mathcal{A} = f(h)$.

Donnez l'expression algébrique de $f(h)$ et précisez l'ensemble de définition de la fonction f.

3. On fixe cette fois $h = 6$ cm et le côté a ne doit pas dépasser 5 cm. L'aire $\mathcal{A}$ est donc fonction de a. On note $\mathcal{A} = g(a)$.

Donnez l'expression algébrique de $g(a)$ et précisez l'ensemble de définition de la fonction g.

COURBES REPRÉSENTATIVES

68 **Exemple**

f est une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

L'égalité $f(2) = -1$ traduit les phrases :

- **l'image** de 2 par f est -1 ;
- 2 est **un** antécédent de -1 ;
- le point A de coordonnées $(2 ; -1)$ est **un** point de $\mathscr{C}$.

Traduisez par des égalités du type $y = f(x)$ chacune des phrases suivantes.

a) $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(-2 ; 5)$.

b) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1.

c) La courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère.

d) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et 3.

69 f est une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Traduisez par des phrases chacune des expressions.

a) $f(0) = 5$ **b)** $f(5) = 0$ **c)** $f(3) = f(7) = -1$

70 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Donnez les coordonnées de trois points situés sur $\mathscr{C}$.

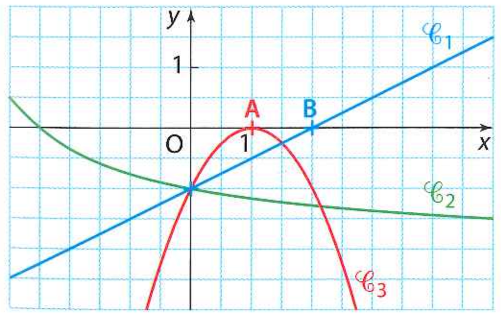
2. Dites si les points suivants sont situés sur $\mathscr{C}$. Justifiez votre réponse.

- $M\left(0 ; \dfrac{-1}{2}\right)$ • $N(15 ; 4{,}27)$ • $P\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{-9}{11}\right)$

71 f, g, h sont trois fonctions définies sur $]-3 ; +\infty[$ par :

- $f(x) = -2 + \dfrac{5}{x+5}$ • $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$ • $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Attribuez à chaque fonction sa courbe représentative.



72 Avec la calculatrice

f est la fonction définie sur $]-\infty ; 6[$ par :

$$f(x) = -x^3 + 7x + \frac{1}{x-6}.$$

1. Faites afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f, pour x compris entre -5 et 4. Vous choisirez y compris entre -20 et 20.

2. L'origine du repère O semble-t-elle appartenir à la courbe représentative de f ?

3. Calculez $f(0)$. Cela confirme-t-il la réponse à la question **2.** ?

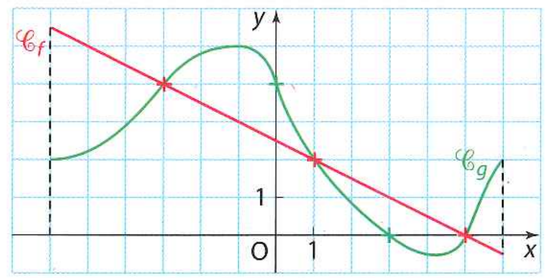
73 Appartenance d'un point à une courbe ALGORITHMIQUE

Complétez cet algorithme qui permet de savoir si un point est sur la courbe d'une fonction f ou non.

```
Entrées
  Saisir :
  a ; b : coordonnées du point
Traitement
  y reçoit f(a)
  Si ..........
    Afficher : «le point est
    sur la courbe»
    Sinon afficher
    .................................
  FinSi
Fin
```

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

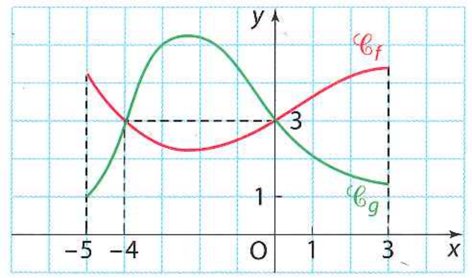
74 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-6 ; 6]$.



Résolvez graphiquement les inéquations suivantes :

a) $0 \leqslant f(x) < 2$; **b)** $g(x) > 0$; **c)** $g(x) \geqslant 4$.

75 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-5 ; 3]$.



Déterminez graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels :

a) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$;

b) $f(x) = g(x)$;

c) $f(x) < g(x)$.

76 Avec la calculatrice

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 4{,}5x + 1.$$

1. Représentez ces deux fonctions sur l'écran de votre calculatrice.

2. En utilisant la fonction TRACE, résolvez graphiquement :

a) l'équation $g(x) = 1$;

b) l'équation $f(x) = g(x)$;

c) l'inéquation $f(x) < g(x)$.

77 Avec la calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

1. a) Tracez à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

b) Quels semblent être les antécédents de 0 par f ?

2. a) Justifiez que, pour tout x, $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

b) Résolvez alors l'équation $f(x) = 0$.

Cela confirme-t-il les valeurs trouvées à la question **1. b)** ?

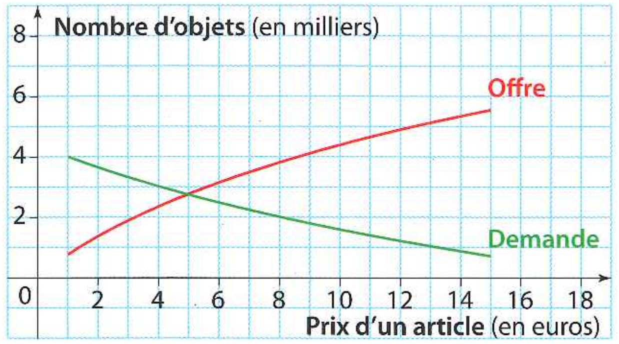
3. Donnez, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

78 Une entreprise fabrique des articles dont le prix unitaire est noté x (en euros).

Sur le graphique sont représentées :

– la fonction « Demande » f, qui à x associe la quantité d'objets, en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter ;

– la fonction « offre » g, qui à x associe la quantité, en milliers, que les industriels sont prêts à fabriquer.



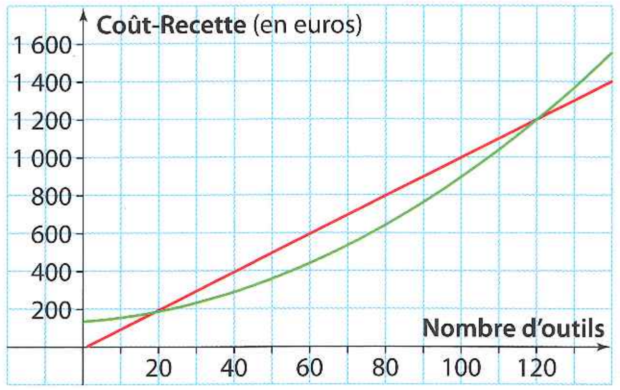
1. Lorsque le prix unitaire est de 10 €, l'offre est-elle supérieure, égale ou inférieure à la demande ?

2. Pour quel prix unitaire le marché est-il équilibré (c'est-à-dire que l'offre est égale à la demande) ?

3. Dans quel intervalle faut-il choisir le prix unitaire pour que l'offre soit inférieure à la demande ?

79 L'entreprise Verthouars fabrique chaque jour une quantité x d'outils de jardinage, avec $x \in [0 ; 140]$. Le coût total de production, en euros, en fonction de x est donné par la fonction f dont voici la représentation graphique.

Le segment représente la recette $R(x)$ en fonction du nombre d'outils vendus.

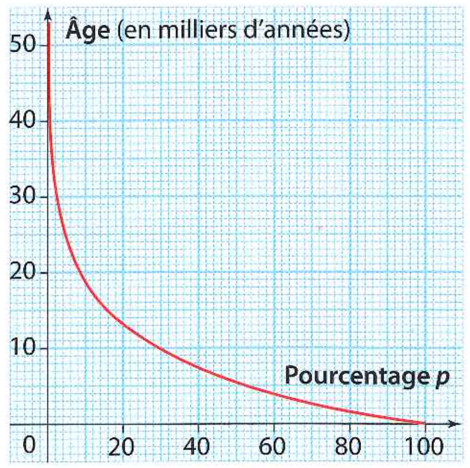


1. Déterminez graphiquement le bénéfice réalisé pour la vente de 100 outils.

2. Résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant R(x)$.

3. Pour quelles valeurs de x l'entreprise est-elle déficitaire ?

80 Après la mort d'un organisme, la quantité de carbone 14 qu'il contient diminue. On appelle p le pourcentage de carbone 14 présent dans l'organisme mort par rapport au pourcentage présent dans l'organisme vivant. La courbe représente la fonction qui, à un pourcentage p de carbone 14, associe une valeur approchée de l'âge de l'organisme.



1. Donnez une approximation de l'âge d'un organisme dont le pourcentage p est 30 %.

2. Complétez les phrases suivantes.

• Lorsque le pourcentage p est compris entre 30 % et 40 %, l'âge de l'organisme est approximativement compris entre …… et …… .

• Lorsque le pourcentage p est inférieur à 10 %, l'âge de l'organisme est …… .

SENS DE VARIATION MINIMUM – MAXIMUM

81 Avec la calculatrice

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 - x^2$.

1. Tracez sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f. Vous prendrez comme fenêtre graphique $-5 \leqslant x \leqslant 5$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

2. Quel semble être le sens de variation de la fonction f ?

3. Modifiez la fenêtre graphique en prenant $-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5$ et $-0{,}1 \leqslant Y \leqslant 0{,}1$ avec un pas de 0,05.

Que constatez-vous ?

Note

Les résultats obtenus avec la calculatrice ou l'ordinateur permettent seulement de faire des conjectures !

82 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-7 ; 8]$. Son tableau de variation est :

x	-7		-3		1		3		8
f	1	↗	5	↘	-2	↗	0	↘	-4

1. Complétez les inégalités suivantes avec le symbole « < » ou le symbole « > » en justifiant votre réponse.

a) $f(-6) \ldots f(-4)$.

b) $f(-2) \ldots f(-1)$.

c) $f(4) \ldots f(5)$.

d) $f(-4) \ldots f(2)$.

2. Recopiez et complétez les phrases suivantes.

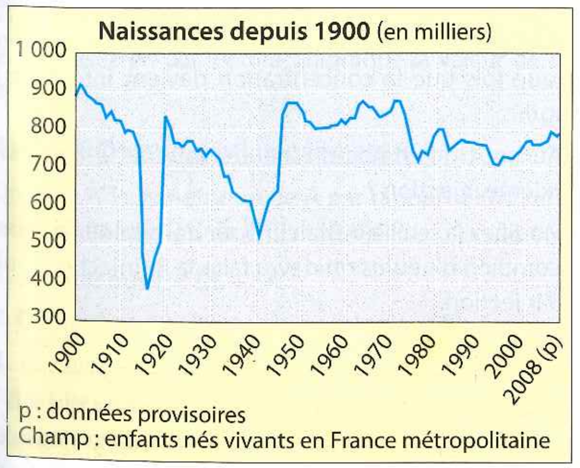
a) Le maximum de f sur l'intervalle $[-7 ; 8]$ est …… . Il est obtenu pour $x =$ ……… .

b) Le maximum de f sur l'intervalle $[1 ; 8]$ est …… . Il est obtenu pour $x =$ ……… .

c) Le minimum de f sur l'intervalle $[-7 ; 8]$ est …… . Il est obtenu pour $x =$ ……… .

83 **Naissances en France depuis 1900**

On note f la fonction représentée ci-après qui à une année associe le nombre de naissances (en milliers).



(*Source* : INSEE, état civil.)

1. Justifiez que $f(1980) \approx 800$ et traduisez cela à l'aide d'une phrase.

2. Peut-on dire que cette fonction est croissante de 1995 à 2008 ?

3. a) Dressez le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1912 ; 1920]$.

Quels sont le minimum et le maximum de la fonction f sur cet intervalle ?

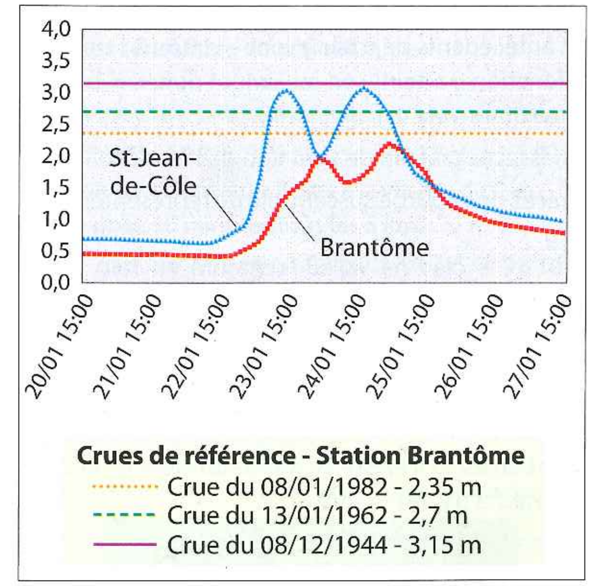
b) Résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) < 500$.

c) Donnez une interprétation historique des deux questions précédentes.

4. Pourquoi peut-on dire que depuis quarante ans le nombre de naissances se situe autour de 750 000 ?

84 **Étude d'une crue**

À l'aide du graphique ci-dessous, répondez aux questions suivantes.

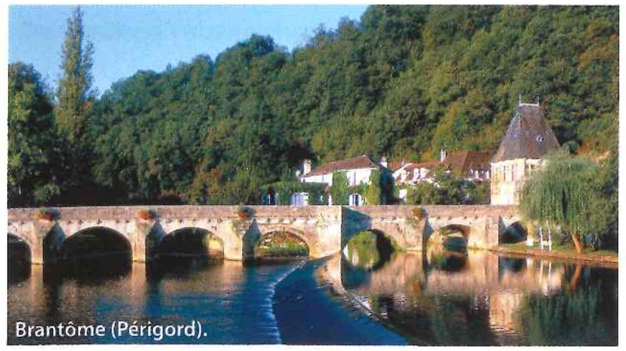


(*Source* : Météo France.)

1. À St-Jean-de-Côle, entre le 20 et le 27 janvier 2009, pendant combien de temps le niveau de l'eau a-t-il été supérieur à 2,5 m ?

2. Quelle hauteur maximale a été atteinte à St-Jean-de-Côle ? à Brantôme ?

3. De St-Jean-de-Côle ou de Brantôme, quelle station est située le plus en amont sur la rivière ? Combien d'heures se sont écoulées entre le premier pic de crue de St-Jean-de-Côle et celui de Brantôme ?


Brantôme (Périgord).

85 Tracez une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :

- f est définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$;
- le maximum de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$ est égal à 5 et il est obtenu pour $x = 1$;
- le minimum de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$ est -2 et il est obtenu pour $x = 4$;
- les antécédents de 0 sont -2 ; 3 et 5.

86 g est une fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;4]$. Elle est strictement croissante sur les intervalles $[0\,;1]$ et $[2\,;4]$. Elle est strictement décroissante sur les intervalles $[-8\,;0]$ et $[1\,;2]$.
De plus :

- $g(4) = 3$;
- l'image de -8 est 3 ;
- $g(0) = -1$;
- les antécédents de 0 par g sont -1 ; 0,5 ; 2 ;
- la fonction g atteint son maximum pour $x = 1$. Ce maximum est 4.

1. Dressez le tableau de variation de la fonction g.

2. Tracez une courbe susceptible de représenter la fonction g.

87 Négation d'une proposition LOGIQUE

- n est un entier multiple de 6. La négation de cet énoncé est « n est un entier qui **n'est pas** multiple de 6 ».
- **Tous** les élèves de la classe aiment les maths. La négation est : « il **existe au moins un** élève de la classe qui n'aime pas les maths ».

Écrivez la négation de chaque énoncé.

a) y est un nombre strictement supérieur à 3.

b) z est un nombre tel que $z \leqslant 4$.

c) f est une fonction telle que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) = 2$.

d) f et g sont des fonctions telles que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;2]$, $f(x) > g(x)$.

Avec les TICE

88 Injection d'un médicament

On injecte dans le sang d'un malade une dose de médicament. La concentration C_0 (en milligrammes par litre) du médicament injecté est $C_0 = 4$ mg/L.

On suppose que ce médicament se répartit instantanément dans le sang et qu'il est ensuite éliminé progressivement : la concentration baisse de 20 % par heure.

Le but de l'exercice est d'observer la concentration du médicament en fonction du temps.

1. Ouvrez une feuille de calcul. Dans la première ligne, inscrivez les heures écoulées depuis l'injection jusqu'à la 24^e heure et dans la cellule A2, inscrivez la valeur de C_0.

A2 | fx Σ = | 4

	A	B	C	D	E	F	G
1	0	1	2	3	4	5	6
2	4						
3							

2. Justifiez que, chaque heure, la concentration est multipliée par 0,8.
Dans la cellule B2, entrez : = A2*0,8 et étirez cette formule vers la droite.

3. Représentez graphiquement les résultats en choisissant un nuage de points.

4. Dites, en vous aidant du graphique obtenu, au bout de combien de temps la concentration aura baissé de moitié.

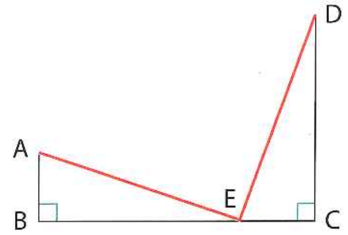
5. On décide de réinjecter une dose de médicament chaque fois que la concentration devient inférieure à 1 mg/L.

a) Au bout de combien d'heures faudra-t-il faire une deuxième injection ?

b) Modifiez la feuille de calcul pour déterminer au bout de combien d'heures on devra faire la 3^e injection, puis la 4^e injection.

Aide
Pour déterminer le moment de la 3^e injection, il faut tenir compte de la deuxième injection : pour cela, on doit ajouter 4 au contenu de la cellule H2.

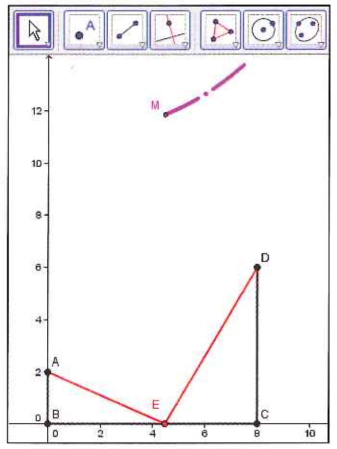
89 On donne la configuration suivante où AB = 2, BC = 8, CD = 6. E est un point du segment [BC].



On pose $s = BE$ et $L = AE + ED$.
Le but est déterminer graphiquement, puis géométriquement, la valeur de s pour la laquelle L est minimale.

Partie A : Conjecturer avec GeoGebra

- Placez les points A=(0,2) , B=(0,0) , C=(8,0) , D=(8,6) à l'aide de la fenêtre saisie.
- Créez les segments [AB], [BC] et [CD] (icône).
- Placez le point E sur [BC] (icône), puis tracez les segments [DE] et [AE].
- Dans la fenêtre de saisie, écrivez s = distance [B,E] puis validez. Puis L = distance[A,E] + distance[E,D] et validez à nouveau.
- Placez enfin le point M = (s, L) et à l'aide d'un clic-droit sur ce point, activez sa trace.
- Faites bouger le point E après l'avoir sélectionné ( ).



1. La courbe décrite par M présente-t-elle un minimum ?

2. Déduisez-en par lecture graphique la valeur de s qui minimise L.

Partie B : Démonstration géométrique

On note A' le symétrique de A par rapport à (BC) et F le point d'intersection de [BC] et [DA'].

1. Justifiez que L = DE + EA'.

2. Démontrez que L est minimale lorsque E = F.

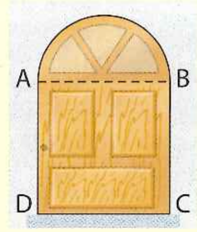
3. Calculez alors la valeur exacte de s correspondant à cette situation.

Confrontez cette valeur avec votre lecture graphique de la partie A.

Prendre toutes les initiatives

90 Le demi-périmètre d'un champ rectangulaire est de 130 m. Le propriétaire dit : « si je retranche 3 m à la largeur et si j'ajoute 5 m à la longueur, j'obtiens un nouveau rectangle dont l'aire est supérieure de 650 m^2 à l'aire du premier rectangle ».
A-t-il raison ? Est-ce possible ?

91 Une porte a la forme d'un carré ABCD surmonté d'un demi-cercle de diamètre [AB]. Le rayon r du cercle est choisi de telle manière que le périmètre de la porte soit strictement supérieur à 6 m et inférieur ou égal à 7 m.



L'aire $\mathcal{S}$ de la porte est une fonction de r.
Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{S}$?

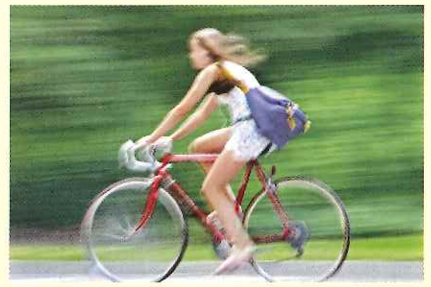
92 Thouars et Montreuil-Bellay sont deux villes distantes de 15 km. Richard part de Thouars à 9 h et marche vers Montreuil-Bellay à la vitesse de 6 km$\cdot$h^{-1}. Il se repose 10 minutes tous les 3 km.

Anaïs part de Montreuil-Bellay en vélo à 9 h 10 et roule vers Thouars à 15 km$\cdot$h^{-1}. Victime d'une crevaison à 9 h 30, elle repart un quart d'heure plus tard et termine son parcours à 20 km$\cdot$h^{-1}.

Déterminez **graphiquement** :

a) l'heure de la rencontre ;

b) la distance du point de rencontre à Thouars.



Approfondissement

Compléments numériques

93 Distance d'arrêt d'un véhicule TICE

La distance d'arrêt D_A (en mètres) d'un véhicule roulant à la vitesse V (en km · h^{-1}) est donnée par la formule :

$$D_A = \frac{V}{3{,}6} + \frac{V^2}{254 \times \mathscr{C}_f}$$

où $\mathscr{C}_f$ est le coefficient de frottements des pneus sur la chaussée.

On donne :

– sur route sèche, $\mathscr{C}_f = 0{,}8$;

– sur route mouillée, $\mathscr{C}_f = 0{,}4$.

(*Source* : CNAC-Belgique.)

1. Calculez la distance d'arrêt (sur route sèche, puis sur route mouillée) d'un véhicule qui roule à 50 km · h^{-1}.

2. Calculez la distance d'arrêt (sur route sèche, puis sur route mouillée) d'un véhicule qui roule à 90 km · h^{-1}.

3. a) À l'aide d'un traceur de courbe, tracez les représentations graphiques des fonctions donnant la distance d'arrêt en fonction de la vitesse dans le cas d'une route sèche, puis d'une route mouillée.

b) Déduisez-en, par lecture graphique, la vitesse à ne pas dépasser dans chaque cas pour s'arrêter en moins de 50 mètres.

4. Pourquoi, d'après ce graphique, peut-on dire que plus la vitesse est élevée, plus l'état de la chaussée (sèche ou mouillée) est important ?

94 Fonction définie sur $\mathbb{N}$

Un producteur de pommes de terre peut en récolter à ce jour 1 700 kg et les vendre 1,20 € le kg.
S'il attend, sa récolte augmentera de 75 kg par jour, mais le prix baissera de 0,03 € par kg et par jour.

1. S'il vend toute sa production aujourd'hui, quel sera son chiffre d'affaires ?

2. On suppose qu'il attend 30 jours pour récolter.
Calculez la quantité qu'il récoltera, le prix du kg de pommes de terre, et déduisez-en le chiffre d'affaires.

3. On suppose que le producteur attend n jours pour récolter (n est un nombre entier compris entre 0 et 30).

a) Exprimez Q(n), la quantité de pommes de terre qu'il pourra récolter le n^e jour, en fonction de n.

b) Exprimez P(n), le prix du kg de pommes de terre le n^e jour, en fonction de n.

c) Démontrez que, après n jours, le chiffre d'affaires est égal à :

$$R(n) = -2{,}25n^2 + 39n + 2\,040.$$

4. Sur la calculatrice, faites afficher une table de valeurs pour R(n) allant de 0 à 30, avec un pas de 1.

5. Utilisez cette table pour déterminer la valeur de n correspondant à un chiffre d'affaires maximal pour ce producteur. Quel sera alors le chiffre d'affaires ?

95 Profondeur d'un puits

Pour estimer la profondeur p d'un puits (en mètres), on lâche une pierre et on note le temps t (en secondes) qui sépare le lâcher de la pierre du bruit qu'elle fait lorsqu'elle arrive au fond du puits.

On démontre que $t = \sqrt{\frac{p}{4{,}9}} + \frac{p}{240}$.

1. À l'aide de la calculatrice, affichez la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{4{,}9}} + \frac{x}{240}.$$

Vous prendrez comme fenêtre graphique :

$0 \leqslant X \leqslant 100$ (pas : 10) et $-1 \leqslant Y \leqslant 5$ (pas : 1).

2. En utilisant le mode TRACE de la calculatrice, estimez la profondeur du puits lorsque :

a) $t = 2$ s ;

b) $t = 3$ s ;

c) t est compris entre 3 et 4 secondes.

96 Négation d'une proposition LOGIQUE

Voir le *Vocabulaire de la logique* ➜ p. 258

1. Reprenez la définition d'une fonction strictement croissante sur un intervalle I.
Niez cet énoncé pour donner la définition d'une fonction non strictement croissante sur un intervalle.

2. Reprenez la définition d'une fonction strictement décroissante sur un intervalle I.
Niez cet énoncé pour donner la définition d'une fonction non strictement décroissante sur un intervalle.

3. f est une fonction définie sur un intervalle J.
c est un nombre de J. Écrivez la négation de l'énoncé : « $f(c)$ est le maximum de f sur J ».

97 Calculatrice et tracé de courbes ALGORITHMIQUE

Pour tracer les courbes représentatives de fonctions, les calculatrices et les logiciels utilisent un algorithme. Voici son principe.
On veut tracer la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - x + 1.$$

❶ On partage $[-2\,;2]$ en 100 intervalles de même longueur. La distance entre les abscisses de deux points « consécutifs » est :

$$\text{longueur intervalle} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

❷ On place les points de la courbe les uns après les autres.
Le premier point a pour abscisse –2. On calcule son ordonnée :

$$y = \frac{(-2)^3}{2} - (-2) + 1 = -1.$$

On place le point $(-2\,;-1)$.
Le deuxième point a pour abscisse $-2 + \frac{1}{25}$. On calcule son ordonnée et on place le point correspondant.
Le troisième point a pour abscisse $-2 + \frac{2}{25}$. On calcule son ordonnée et on place le point correspondant.

❸ On continue ce processus jusqu'au point d'abscisse $-2 + \frac{100}{25} = 2$.

1. Voici l'algorithme correspondant. Complétez-le.

```
Variables
  x, y, l
Traitement et sortie
  Pour i de ..... jusque ..... faire
          x reçoit -2 + .....
          y reçoit .....
          Placer le point (x ; y)
```

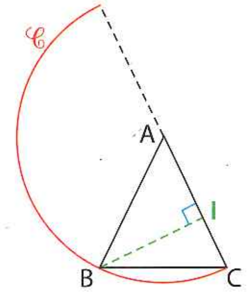
2. Programmez-le sur Algobox et testez-le.

b) Tracez, sur l'écran de la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel, la courbe représentative de f. Vous pouvez prendre $0 \leqslant X \leqslant 16$ et $-1 \leqslant Y \leqslant 50$ comme fenêtre graphique.

c) La fonction f semble admettre un maximum pour une valeur de x_0. À l'aide de la fonction TRACE, déterminez une valeur approchée de x_0.

3. Démontrer

On se propose dans cette question de trouver la valeur exacte de x_0.
On a tracé le demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AC.
B est un point du demi-cercle $\mathscr{C}$ et I le projeté orthogonal de B sur (AC).



a) Démontrez que aire (ABC) = 4 × BI.

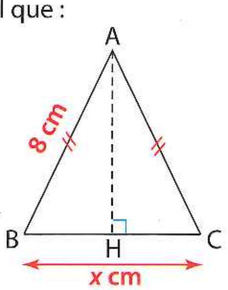
b) L'aire du triangle ABC est maximale lorsque BI est maximale. Quelle est la position de B sur $\mathscr{C}$ pour qu'il en soit ainsi ?

c) Déduisez-en que le triangle BAC est rectangle isocèle en A et que $x_0 = 8\sqrt{2}$.

98

ABC est un triangle isocèle tel que :
AB = AC = 8 cm et BC = x cm.

On note f la fonction qui à x associe l'aire du triangle ABC.



1. a) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur l'intervalle $[0\,;16]$?

b) Démontrez que :

$$f(4) = 4\sqrt{15}\ \text{cm}^2 \quad \text{et que} \quad f(8) = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

2. Conjecturer avec la calculatrice

a) Plus généralement, démontrez que :

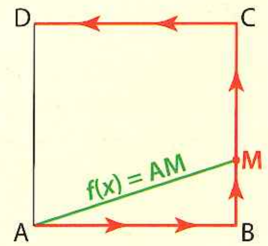
$$f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{256 - x^2}.$$

Prendre toutes les initiatives

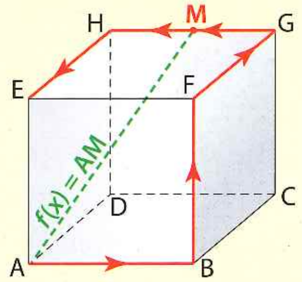
99 **1.** Un carré ABCD a pour côté 4. Un point M se déplace sur les côtés du carré en partant de A et en suivant le chemin :

A → B → C → D.

Il s'arrête en D.
On note x la longueur parcourue par M depuis le départ et on appelle $f(x)$ la distance AM.
Dressez le tableau de variation de la fonction f.



2. Même question lorsque M se déplace sur les arêtes du cube ABCDEFGH avec AB = 4 en suivant le trajet :
A → B → F → G → H → E.
Il s'arrête en E.



100 Une cycliste effectue un aller-retour entre deux villes A et B. À l'aller, sa vitesse est de 25 km · h^{-1} et au retour, elle est de x km · h^{-1}.
On note f la fonction qui à x associe la vitesse moyenne de la cycliste sur l'ensemble du parcours.
Démontrez que $f(x) < 50$.