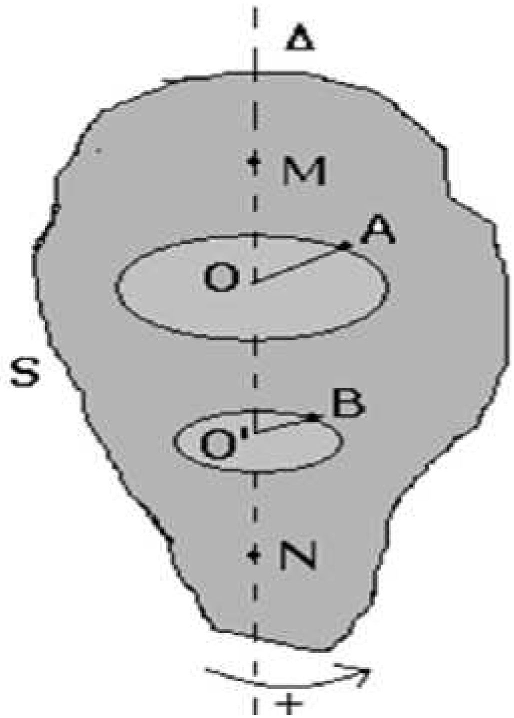
Mouvement de rotation d’un solide indéformable autour d’un axe fixe

I)Définition de mouvement de rotation autour d' un axe fixe

1) Exemple

Le solide ***(s)*** est en mouvement autour d'axe ***(Δ)***, on remarque que :



- Les points ***A et B*** sont en mouvement suivant deux cercles de centre ***O*** et ***O'***.
- Les points ***M et N*** appartenant à (Δ) sont immobiles.

2) Définition

Un solide **S** est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, si tous les points de ce système ont des mouvement circulaires dont les trajectoires sont centrées sur cet axe, sauf ceux appartenant à cet axe.

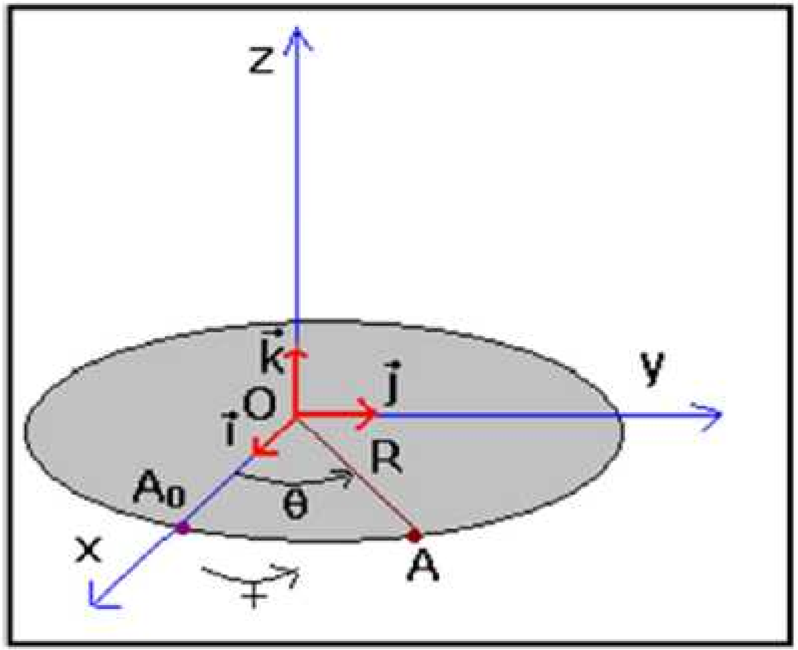
II) Repérage d'un point matériel en rotation autour d'un axe fixe

Pour étudier le mouvement d'un point matériel ***A*** d'un solide (s), on choisit un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que le vecteur $\vec{k}$ est confondu avec l'axe de rotation (Δ). Le mouvement de rotation se fait dans le plan $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne du point mobile ***A*** à un instant donné ***t*** est la valeur algébrique de la distance :

$$s=\widehat{A_0A}$$



Son unité dans le ***SI*** est le mètre ***(m)***

2) Abscisse angulaire

L'abscisse angulaire du point mobile ***A*** à un instant donné t est la valeur algébrique de l'angle :

$$\theta(t) = \widehat{\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA}\right)}$$

3) Relation entre l'abscisse angulaire *θ* et l'abscisse curviligne *s*

$$\boxed{s = R.\theta}$$

(m) (m) (rad)

R est le rayon de trajectoire circulaire de point ***A*.**

III) Vitesse angulaire

1) Vitesse angulaire moyenne

Considérons un point matériel ***A*** d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Il occupe la position $\boldsymbol{A_1}$ à l'instant $\boldsymbol{t_1}$ et occupe la position $\boldsymbol{A_2}$ à l'instant $\mathbf{t_2}$**.**

$\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$ sont repérées par les abscisses angulaires respectivement $\boldsymbol{\theta_1}$ et $\boldsymbol{\theta_2}$.

On définit **la vitesse angulaire moyenne** $\boldsymbol{\omega_{moy}}$ du point ***A*** entre les instants $\boldsymbol{t_1}$ et $\boldsymbol{t_2}$ par le rapport :

rad.s^{-1}

$$\boxed{\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}}$$

Son unité dans le ***SI*** est le radian par seconde : ***rad.s***$^{-1}$

2) Vitesse angulaire instantanée

La vitesse angulaire instantanée d'un point ***A*** en mouvement circulaire à l’instant ***t*** se définit comme la vitesse angulaire moyenne du solide pendant une brève durée autour de l’instant ***t***.

Pratiquement, considérons un instant $\boldsymbol{t_i}$ encadré par deux instants très rapprochés $\boldsymbol{t_{i-1}}$ et $\boldsymbol{t_{i+1}}$. La vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega_i}$ à l’instant $\boldsymbol{t_i}$ est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{\mu_i = \frac{\Delta \overline{\ }}{\Delta t} = \frac{\overline{\ }_{i+1} - \overline{\ }_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}}$$

3) Vitesse linéaire instantanée

La vitesse linéaire instantanée $\boldsymbol{v_i}$ à l’instant $\boldsymbol{t_i}$ est donnée par la relation suivante :

m.s^{-1}

$$\boxed{v_i = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}}$$

Son unité dans le SI est le mètre par seconde : ***m.s***$^{-1}$

4) Relation entre vitesse linéaire *v* et vitesse angulaire *ω*

On sait que : $\boldsymbol{s = R.\theta}$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = R.\frac{\Delta \overline{}}{\Delta t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v \;=\; R\,.\mu}$$

(m.s^{-1}) ***(m)*** ***rad.s^{-1}***

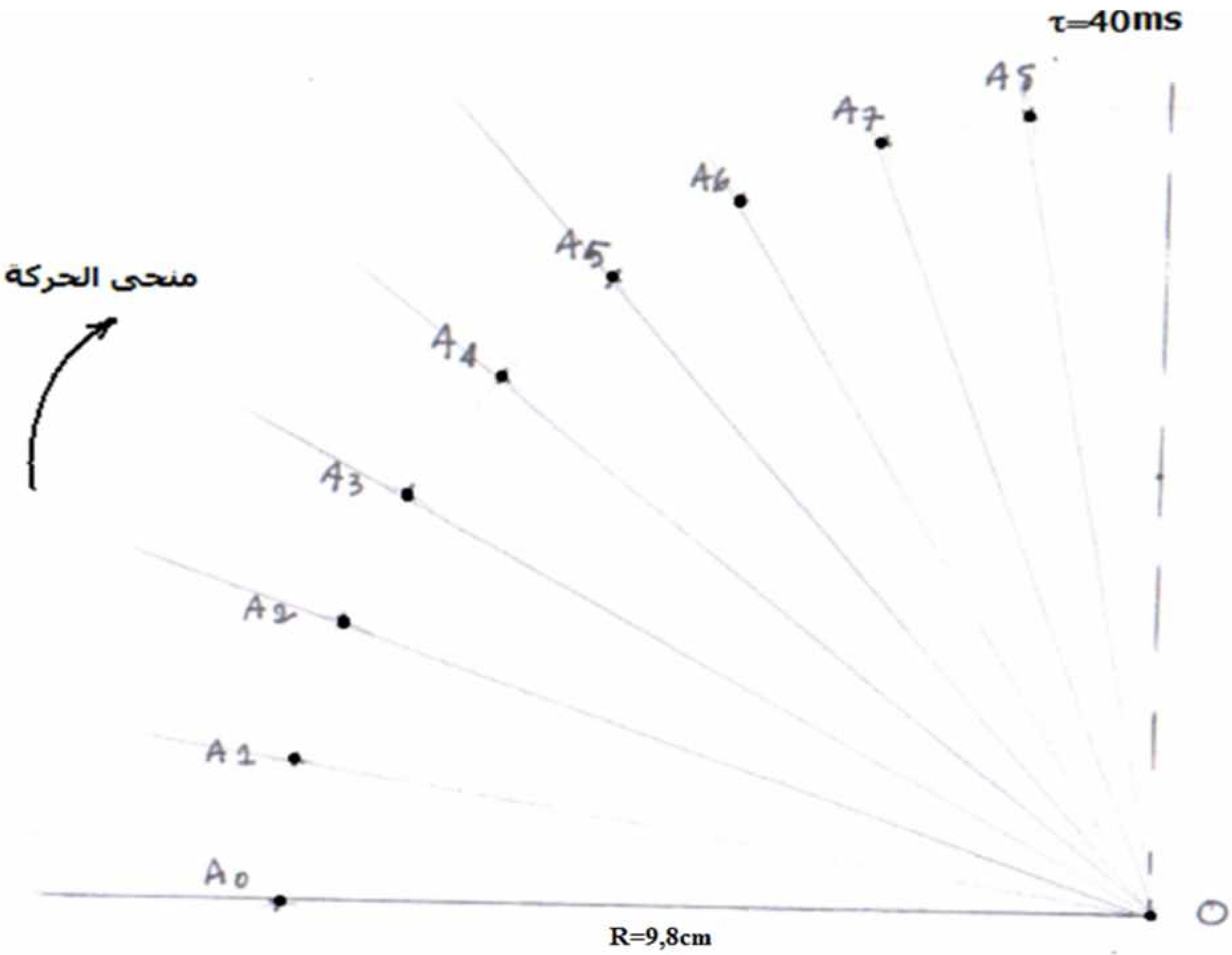
5) Vérification expérimentale de la relation : $v = R.\omega$

a) Expérience :

Considérons un autoporteur en mouvement de rotation sur une table à coussins d’air.

On enregistre le mouvement d’un point ***A*** situé sur l’axe vertical de l’autoporteur à intervalles de temps successifs égaux (τ= 40 ms).

On obtient l’enregistrement suivant :


τ=40ms
A8
A7
A6
A5
منحنى الحركة
A4
A3
A2
A1
A0
R=9,8cm
O

b) Interprétation :

On suppose qu'à l'instant ***t = 0***, le corps se trouve au point A_2 .

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$t_i(s)$							
$\theta(rad)$							
$\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$							
$\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_{i-1}$							
$\omega_i(rad/s)$							
$s_i(m)$							
$\Delta s_i = s_{i+1} - s_{i-1}$							
$v_i(m/s)$							

c) Vérification de v=R.ω :

A partir du tableau on remarque que : ***v=0,42 m/s***

Et on a : $\boldsymbol{R.\omega = 9{,}8.10^{-2}.4{,}4 = 0{,}43\ m/s}$ $\longrightarrow$ $\boxed{v = R.\mu}$

III) Mouvement de rotation uniforme

1) Définition

On dit que le mouvement de rotation d' un solide autour d'un axe fixe est uniforme si la vitesse angulaire ω de ce mouvement reste inchangée au cours du temps : ***ω=cte***.

2) Période et fréquence

Dans le mouvement de rotation uniforme, chaque point de solide passe par la même position avec la même vitesse angulaire : Ce mouvement est dite périodique.

➤ ***La période :***

La période *T* est la durée nécessaire à chaque point de solide (s) pour faire un tour complet, son unité est la seconde : ***(s).***

On sait que : $\mu = \frac{\Delta}{\Delta t} \longrightarrow \Delta\theta = \omega . \Delta t$

Lorsque $\boldsymbol{\Delta t = T} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\theta = 2\pi}$

$$\longrightarrow \boxed{T = \frac{2\text{®}}{\mu}}$$

(s)

➢ *La fréquence* :

La fréquence de rotation ***f*** représente le nombre de tours effectués par le solide pendant une seconde. Son unité dans le ***SI*** est le hertz ***(Hz).***

(Hz) $\boxed{f = \frac{1}{T}} \longleftrightarrow \boxed{f = \frac{\mu}{2\text{®}}}$

On peux exprimer la fréquence ***f*** en tour par minute ***(tr/min)*** tel que :

$$\boldsymbol{1Hz = 1\ tr/s = 60\ tr/min}$$

➢ Application 1:

Le tambour d'une machine à laver le linge est un cylindre de ***46 cm*** de diamètre. Au moment de l'essorage, il tourne autour de son axe à ***800 tr / min***.

1) Calculer sa vitesse angulaire **ω** de rotation.
2) Calculer la vitesse ***v*** d'un point de la périphérie du tambour.
3) Calculer la période ***T*** et la fréquence ***f*** du mouvement.

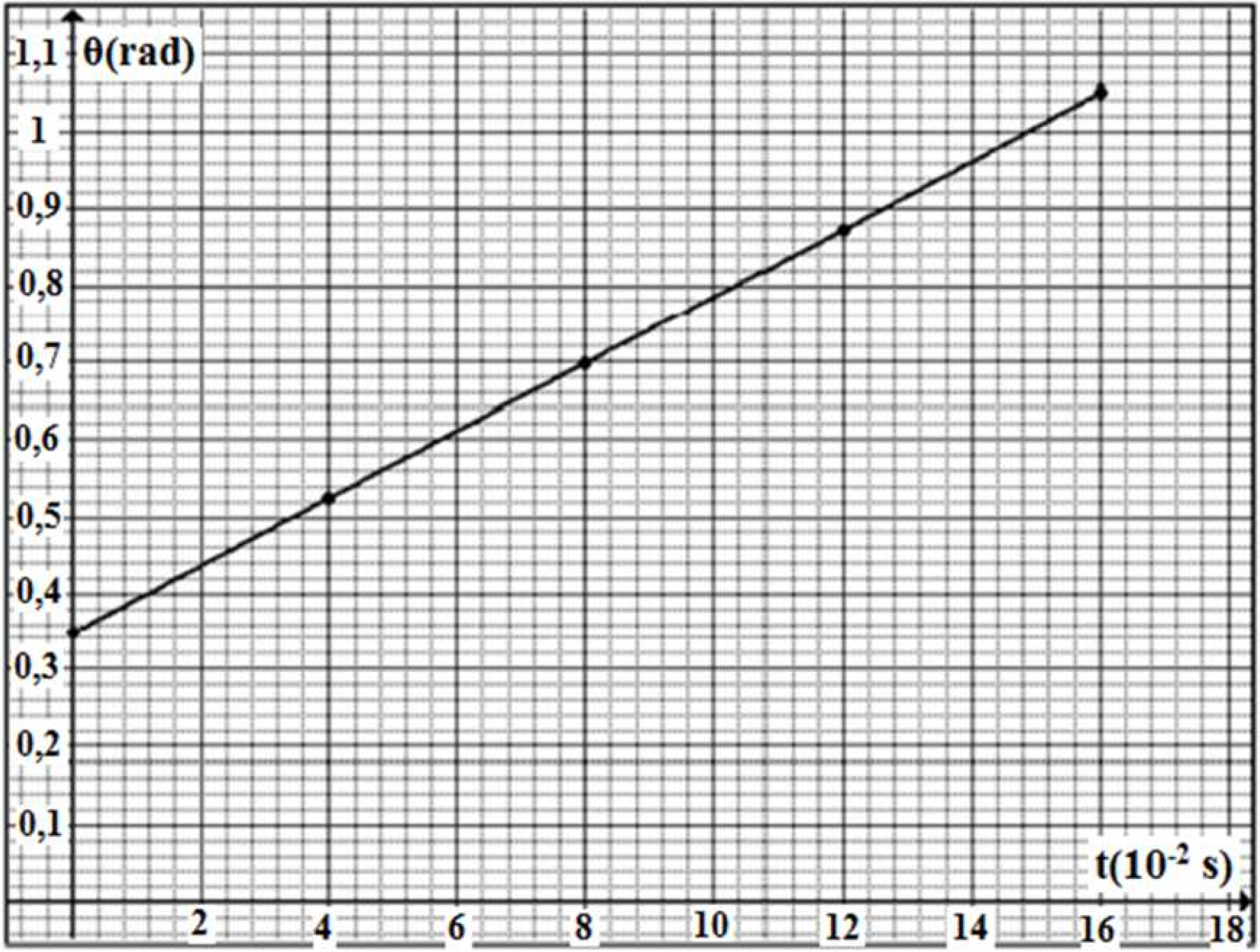
2) Equation horaire du mouvement

a) Activité expérimentale

➢ la courbe : θ=f(t)

En exploitant le tableau précédent, nous traçons la courbe représentant la variation de l'abscisse angulaire $\boldsymbol{\theta}$ en fonction de ***t*** **θ=f(t).**

On suppose qu'à l'instant ***t = 0***, le corps se trouve au point $\boldsymbol{A_2}$ **.**


θ(rad)
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
t(10⁻² s)
2
4
6
8
10
12
14
16
18

- **Interprétation :**

✓ On remarque que la courbe **θ=f(t**) est une fonction affine s’écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\theta(t)=a.t+b}$$

✓ ***a*** la pente de la courbe.

$$a = \frac{\Delta^{-}}{\Delta t} \approx 4{,}4 rad/s$$

$$a = \mu$$

Donc ***a*** n’est que la vitesse angulaire ***ω***.

✓ ***b*** est l’abscisse angulaire à ***t=0s*** , d’après la courbe :

$$\boldsymbol{b= 0{,}35\ rad}$$

Donc la fonction ***θ(t)*** s’écrit ***:***

$$\boldsymbol{\theta(t)=4{,}4.t+0{,}35}$$

θ(t) est appelée l’équation horaire de mouvement de rotation.

b) Généralisation :

L'équation horaire de mouvement de rotation uniforme d'un solide autour d'un axe fixe est donnée par l'expression suivante :

$$\boxed{\theta(t)=\omega.t+\theta_0}$$

ω est la vitesse angulaire de solide
θ_0 est l'abscisse angulaire de solide à $t=0$

- **NB :**

$$\theta(t)=\omega.t+\theta_0 \Longrightarrow R.\theta(t)=R.\omega.t+R.\theta_0$$

$$\boxed{s(t)=v.t+s_0}$$

➢ Application 2:

L’équation horaire du mouvement d’un point M d’un corps solide en rotation autour d’un axe fixe est :

$$s(t) = 0{,}60t+0{,}04$$; avec ***s*** en ***(m)*** et ***t*** en seconde ***(s)***

1) Quelle est la nature du mouvement ?
2) Déterminer les valeurs de l’abscisse curviligne du point ***M*** à l’instant ***t = 0s*** et sa vitesse linéaire .
3) Sachant que le diamètre de la trajectoire circulaire est ***d=20cm***, déterminer l’expression de l’abscisse angulaire en fonction du temps ***θ(t)***.