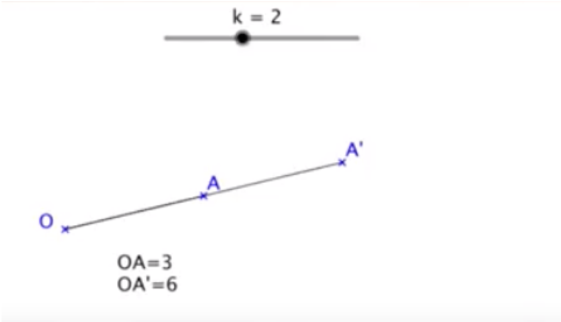
Leçon 17 Les homothéties

Comme les symétries et les rotations, les homothéties sont des transformations du plan. Les homothéties sont caractérisées par un point (le centre de l'homothétie) et un nombre (le rapport d'homothétie)

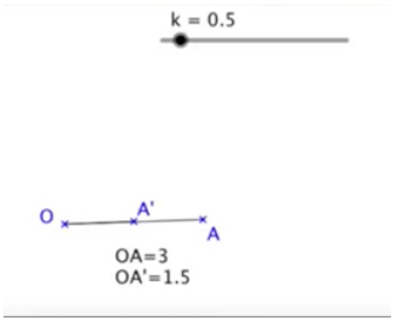
I Homothétie de rapport positif

1) Définition : Soit O un point et k un nombre positif
L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui transforme le point A en A' tel que O, A et A' sont alignés avec A et A' du même côté de O tel que OA'= k x OA

Exemple : si k est supérieur à 1 :

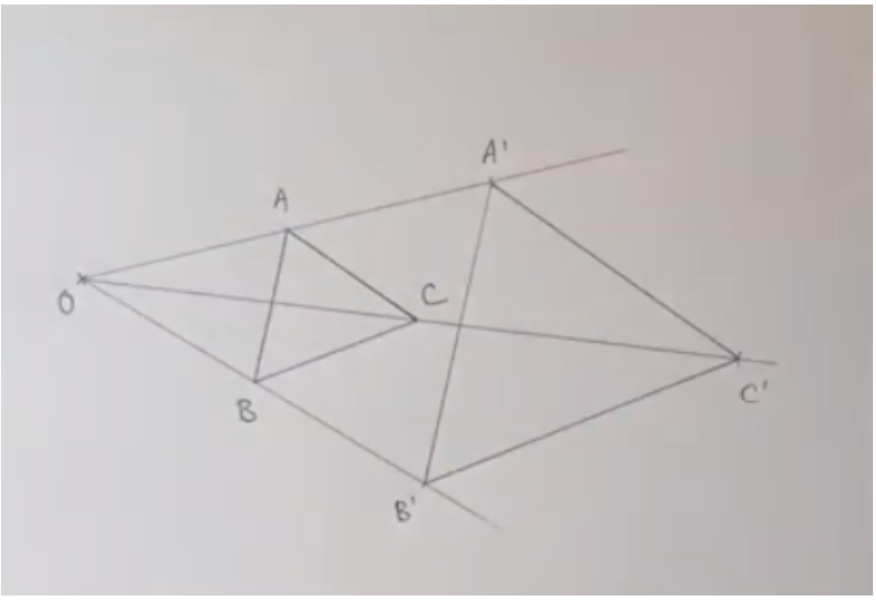


Exemple : si k est inférieur à 1 :



Construisons maintenant l'image d'un triangle ABC par une homothétie de rapport 2.

(Voir les vidéos pour comprendre la construction)



2) Propriétés : Soit h une homothétie de centre 0 et de rapport k > 0

a) lien avec les agrandissements et les réductions

- Si k>1 alors l'homothétie est un agrandissement
- Si 0<k<1 alors l'homothétie est une réduction

Les homothéties conservent donc les mesures d'angles mais pas forcément les longueurs contrairement aux symétries et aux rotations

Si k = 1 l'homothétie est une transformation qui ne change rien : on dit que c'est l'identité

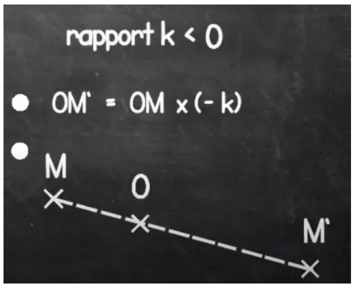
b) lien avec le théorème de Thalès

L'image d'un segment par une homothétie de rapport positif est un segment parallèle.

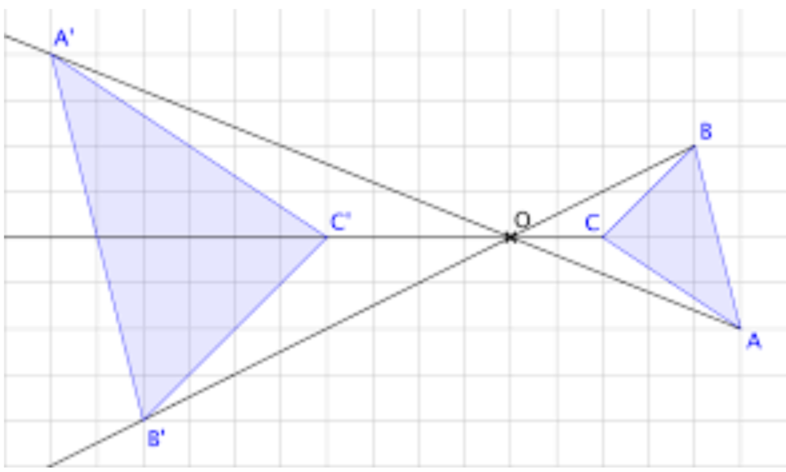
II Homothétie de rapport négatif

1) Définition : Soit O un point et k un nombre négatif
L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui transforme le point M en M' tel que O, M et M' sont alignés avec O entre les points M et M' et tel que OM'= -k x OM

Ici l'image d'un point va se retrouver de l'autre côté du centre



Exemple : image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport -2



2) Propriétés : Soit h une homothétie de centre 0 et de rapport $k < 0$

- Si $k<-1$ alors l'homothétie est un agrandissement
- Si $-1<k<0$ alors l'homothétie est une réduction

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale ; elle ne transforme pas les longueurs

Propriété : L'image d'un segment par une homothétie de rapport négatif est un segment parallèle.