

Leçon 26 Les équations

I Qu'est ce qu'une équation ?

Une **équation** est une égalité dans laquelle il y a un nombre représenté par une lettre : l'inconnue

exemple : $3x + 2 = 2x + 5$ ici x est l'inconnue

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

exemple :

$$3 \times 4 + 2 = 14$$

$$2 \times 4 + 5 = 13$$

donc 4 n'est pas une solution de l'équation $3x + 2 = 2x + 5$ car 14 est différent de 13

En revanche :

$$3 \times 3 + 2 = 11$$

$$2 \times 3 + 5 = 11$$

donc 3 est une solution de l'équation $3x + 2 = 2x + 5$. C'est même la seule solution

Résoudre une équation, c'est déterminer toutes ses solutions

Nous allons voir dans cette leçon comment déterminer toutes les solutions d'une équation sans tester les différentes valeurs de l'inconnue.

On se reposera sur les propriétés algébriques suivantes :

Propriétés : a et b sont deux nombres

Si $a = b$ alors, pour tout nombre c : $a + c = b + c$

Si $a = b$ alors, pour tout nombre c : $a - c = b - c$

Si $a = b$ alors, pour tout nombre c : $a \times c = b \times c$

Si $a = b$ alors, pour tout nombre c différent de 0 : $a / c = b / c$

II Comment résoudre une équation ?

Pour résoudre une équation, on utilise les propriétés précédentes de telle manière à aboutir à une égalité du type $x = a$ où a est un nombre qui sera la solution de l'équation.

a) exemples de type 1 : les « x » ne sont que d'un seul côté de l'égalité

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 12 \\ 2x + 4 - 4 &= 12 - 4 \\ 2x &= 8 \\ 2x / 2 &= 8 / 2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 18 \\ 5x - 3 + 3 &= 18 + 3 \\ 5x &= 21 \\ 5x / 5 &= 21 / 5 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{21/5 = 4,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x/4 + 5 &= 10 \\
x/4 + 5 - 5 &= 10 - 5 \\
x/4 &= 5 \\
x/4 \times 4 &= 5 \times 4 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{20}
\end{aligned}$$

b) exemples de type 2 : il y a des « x » des 2 côtés de l'égalité

Il s'agit de se ramener alors à une équation du type 1

$$\begin{aligned}
5x + 4 &= 3x + 10 \\
5x - 3x + 4 &= 3x - 3x + 10 \\
2x + 4 &= 10 \\
2x + 4 - 4 &= 10 - 4 \\
2x &= 6 \\
2x / 2 &= 6 / 2 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10x - 24 &= 8x - 30 \\
10x - 8x - 24 &= 8x - 8x - 30 \\
2x - 24 &= -30 \\
2x - 24 + 24 &= -30 + 24 \\
2x &= -6 \\
2x / 2 &= -6 / 2 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{-3}
\end{aligned}$$

c) exemples de type 3 : il faut réduire chacun des membres avant de résoudre

$$\begin{aligned}
40 - (2x + 10) &= 5(2x - 3) \\
40 - 2x - 10 &= 10x - 15
\end{aligned}$$

$$30 - 2x = 10x - 15$$

$$\begin{aligned}
30 - 2x + 2x &= 10x - 15 + 2x \\
30 &= 12x - 15 \\
30 + 15 &= 12x - 15 + 15 \\
45 &= 12x \\
45/12 &= 12x/12 \\
x &= 45/12 = 3,75
\end{aligned}$$

On va d'abord réduire chacun des membres : à gauche je supprime les parenthèses en changeant les signes (à cause du - devant) alors qu'à droite je développe en utilisant la distributivité.

On se retrouve alors avec un équation de type 2 que l'on résout comme précédemment.

III Mise en équation d'un problème

ÉNONCÉ

Sur son MP3, Axel a téléchargé 26 chansons : de rap, de variétés et de rock. Elle a téléchargé une seule chanson de variétés et quatre fois plus de chansons rap que de chansons rock.

- Combien Axel a-t-elle téléchargé de chansons rock ?

SOLUTION

- **Étape 1 : Choix de l'inconnue**

On désigne par x le nombre de chansons rock téléchargées.

- **Étape 2 : Mise en équation du problème**

$$x + 4x + 1 = 26$$

- **Étape 3 : Résolution de l'équation**

$$x + 4x + 1 = 26$$

$$5x + 1 = 26$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

- **Étape 4 : Vérification**

$$5 + 4 \times 5 + 1 = 26$$

5 est bien solution de l'équation initiale.

- **Étape 5 : Interprétation et conclusion**

5 est un nombre entier positif, cette solution est cohérente.

Axel a donc téléchargé 5 chansons rock.

Axel a téléchargé
en tout 26 chansons : x de rock,
 $4x$ de rap et 1 de variétés.



Le nombre de chansons
est obligatoirement un nombre
entier positif.