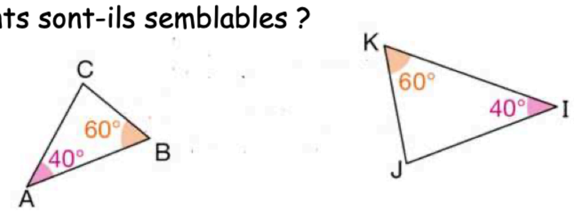
Leçon 2 Les triangles semblables

I Triangles semblables et angles

<u>Définition</u> : Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Exemple : Les triangles suivants sont-ils semblables ?

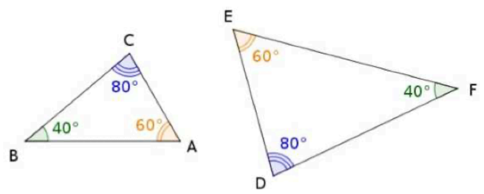


-> Dans les triangles ABC et IJK on a : $\widehat{CAB} = \widehat{JIK} = 40°$ et $\widehat{CBA} = \widehat{JKI} = 60°$.
Par ailleurs on sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°,
donc pour le triangle ABC on a : $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) = 180° - (40° + 60°) = 80°$
et pour le triangle IJK on a : $\widehat{IJK} = 180° - (\widehat{JIK} + \widehat{JKI}) = 180° - (40° + 60°) = 80°$.
ainsi $\widehat{ACB} = \widehat{IJK} = 80°$.
Les triangles ABC et IJK ont leurs angles deux à deux de même mesure, donc ils sont des triangles semblables.

<u>Propriété 1:</u> Si deux angles d'un triangle ont les mêmes mesures que deux angles d'un autre triangle alors les 2 triangles sont semblables.

<u>Vocabulaire</u> : Lorsque deux triangles sont semblables :
- Les angles égaux sont dit homologues.
- Les côtés opposés à des angles égaux sont dits homologues.
- Les sommets des angles égaux sont dits homologues.

Exemple : Les triangles ABC et EFD sont semblables (voir-figure ci-dessous). Compléter le tableau suivant :



Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{FED}$	A et E	[AB] et [EF]
$\widehat{CBA}$ et $\widehat{DFE}$	B et F	[BC] et [FD]
$\widehat{BCA}$ et $\widehat{FDE}$	C et D	[CA] et [DE]

II Triangles semblables et longueur

<u>Rappel : Agrandir ou réduire une figure</u> avec un coefficient k (k entier >0), c'est multiplier toutes les longueurs de la figure par le nombre k.

Si k>1, il s'agit d'un <u>agrandissement</u>.
Si k<1, il s'agit d'une <u>réduction</u>.

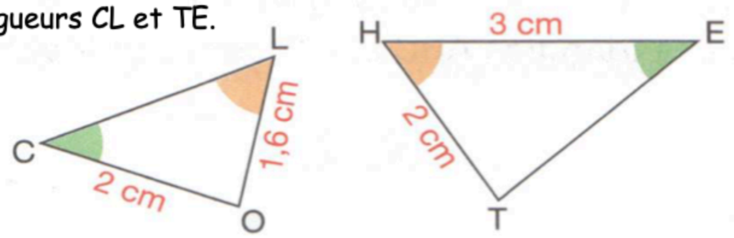
Les agrandissements et les réductions ne modifient pas la forme de la figure : ils conservent les mesures d'angle.

Propriété 2 : Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Remarque : on peut exprimer cette propriété sous la forme suivante

Si deux triangles sont semblables, alors l'un des triangles est un agrandissement de l'autre

Exemple : Les triangles COL et THE sont semblables (voir figure ci-dessous).
Calculer les longueurs CL et TE.



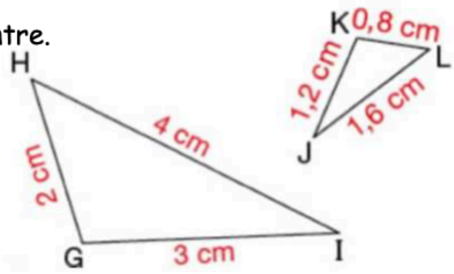
Les triangles COL et THE sont semblables, donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles et on a :

$\frac{HT}{LO} = \frac{EH}{CL} = \frac{TE}{OC}$ soit $\frac{2}{1,6} = \frac{3}{CL} = \frac{TE}{2} = 1,25$.

Ce qui donne $\frac{3}{CL} = 1,25$ donc $CL = \frac{3}{1,25} = 2,4$ cm et $\frac{TE}{2} = 1,25$ donc $TE = 2 \times 1,25 = 2,5$ cm.

Propriété 3 (réciproque de la propriété 2) : Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles deux à deux, alors ces triangles sont semblables.

Exemple 1 : On considère les deux triangles GHI et JKL ci-contre.
Ces triangles sont-ils semblables ?



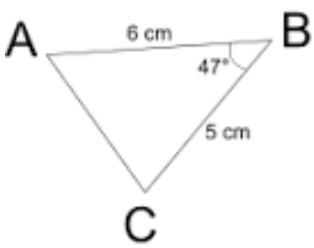
On remarque que $\frac{0,8}{2} = \frac{1,2}{3} = \frac{1,6}{4} = 0,4$

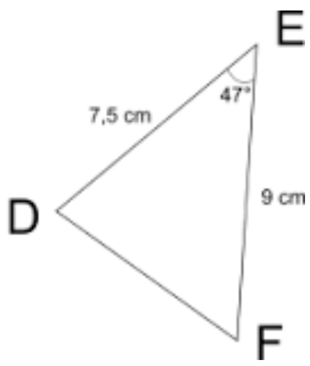
Donc $\frac{KL}{HG} = \frac{JK}{GI} = \frac{JL}{HI} = 0,4$

Comme les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles, alors les triangles GHI et JKL sont semblables.

Propriété 4 : Si deux triangles ont chacun un angle de la même mesure compris entre 2 côtés dont les mesures sont proportionnelles alors ces triangles sont semblables

Exemple 2 :





ABC et DEF sont semblables car ils ont chacun un angle de 47° et les longueurs des 2 côtés qui portent l'angle de 47° sont proportionnelles (on multiplie par 1,5)