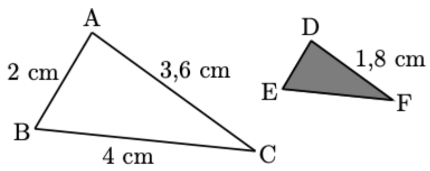
Leçon : Agrandissements, Réductions et triangles semblables

I Agrandissements et réductions

Rappel : Agrandir ou réduire une figure avec un coefficient k (k entier >0), c'est multiplier toutes les longueurs de la figure par le nombre k.

Si k>1, il s'agit d'un agrandissement.
Si k<1, il s'agit d'une réduction.

★ Exemple : Le triangle DEF est une réduction du triangle ABC. Calculer DE et EF.



Le coefficient de réduction est égal à $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{1,8}{3,6} = 0,5$.
Donc, $DE = 0,5 \times AB = 0,5 \times 2 = 1\,\text{cm}$, et $EF = 0,5 \times BC = 0,5 \times 4 = 2\,\text{cm}$.

Propriété (Conservation des angles)

Lors d'une réduction ou d'un agrandissement, les angles sont conservés.

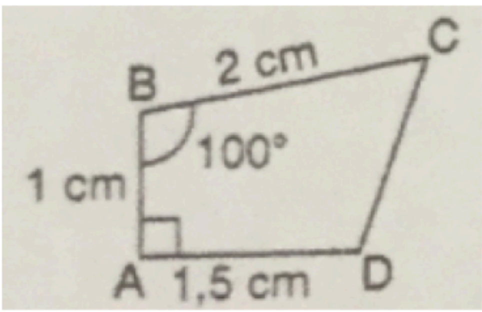
Remarque : Lors d'une réduction ou d'un agrandissement, les angles droits sont conservés : un triangle rectangle devient un triangle rectangle.

Remarque : Il y a **proportionnalité** entre les longueurs initiales d'une figure et les longueurs de la figure après l'agrandissement/réduction. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient d'agrandissement réduction.

Exercices et corrections :

Exercice n°1 :

Construire un agrandissement de ABCD dans le rapport 1,8



Exercice n°2 :

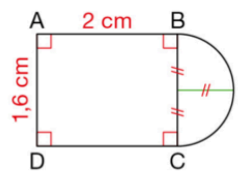
a. Construire deux rectangles :
- ABCD tel que AB = 5 cm et BC = 3 cm ;
- EFGH tel que EF = 7,5 cm et FG = 5 cm.

b. EFGH est-il un agrandissement de ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice n°3 :

Une boîte de sucre et un morceau de sucre ont la forme d'un parallélépipède rectangle.
Les dimensions de l'intérieur de la boîte de sucre sont : 17,1 cm ; 11,2 cm et 5,4 cm.
Les dimensions d'un morceau de sucre sont : 1,14 cm ; 1,8 cm et 2,8 cm.
Un morceau de sucre est-il une réduction de la boîte de sucre ?

Exercice n°4 :



1) Construire un agrandissement de cette figure pour lequel le segment [A'B'] correspondant au segment [AB] mesure 7 cm.

2) Construire une réduction de cette figure pour laquelle le segment [A'D'] correspondant au segment [AD] mesure 1,2 cm.

Exercices - correction

Exercice n°1 :
$A'D' = 1,8 \times 1,5 = 2,7\ cm$
$A'B' = 1,8 \times 1 = 1,8\ cm$
$B'C' = 1,8 \times 2 = 3,6\ cm$
Lors d'un agrandissement, les angles ne changent pas donc $\widehat{B'A'D'} = 90°$ et $\widehat{A'B'C'} = 100°$

Exercice n°2 :
$\frac{EF}{AB} = \frac{7,5}{5} = 1,5$ $\qquad$ $\frac{FG}{EF} = \frac{5}{3} \approx 1,66$

Donc EFGH n'est pas un agrandissement de ABCD

Exercice n°3 :
On commence par classer les dimensions dans l'ordre croissant

5,4	11,2	17,1
1,14	1,8	2,8

$\frac{1,14}{5,4} = \frac{19}{90}$

$\frac{1,8}{11,2} = \frac{9}{56}$

$\frac{2,8}{17,1} = \frac{28}{171}$

Donc un morceau de sucre n'est pas une réduction de la boite.

Exercice n°4 :
1) AB = 2 cm et A'B'=7 cm.
Il faut commencer par déterminer le coefficient d'agrandissement
$k = \frac{7}{2} = 3,5$. Toutes les dimensions doivent être multiplier par 3,5

$A'D' = 1,6 \times 3,5 = 5,6\ cm$

Il ne vous reste plus qu'à construire l'agrandissement

2) AD=1,6 cm et A'D'=1,2 cm
Il faut commencer par déterminer le coefficient de réduction
$k = \frac{1,2}{1,6} = \frac{3}{4} = 0,75$

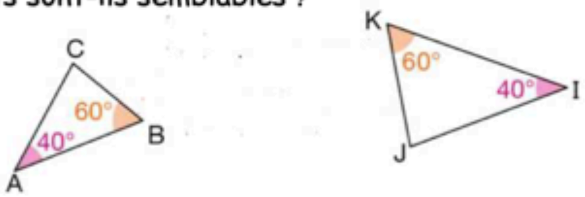
$A'B' = 2 \times 0,75 = 1,5cm$

II Triangles semblables

A) Triangles semblables et angles

<u>Définition</u> : Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Exemple : Les triangles suivants sont-ils semblables ?

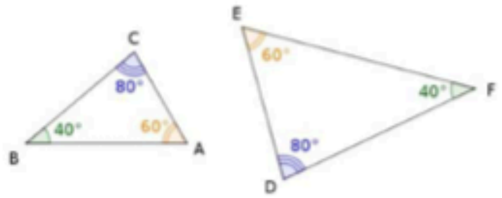


-> Dans les triangles ABC et IJK on a : $\widehat{CAB} = \widehat{JIK} = 40°$ et $\widehat{CBA} = \widehat{JKI} = 60°$.
Par ailleurs on sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°,
donc pour le triangle ABC on a : $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) = 180° - (40° + 60°) = 80°$
et pour le triangle IJK on a : $\widehat{IJK} = 180° - (\widehat{JIK} + \widehat{JKI}) = 180° - (40° + 60°) = 80°$.
ainsi $\widehat{ACB} = \widehat{IJK} = 80°$.
Les triangles ABC et IJK ont leurs angles deux à deux de même mesure, donc ils sont des triangles semblables.

<u>Propriété 1:</u> Si deux angles d'un triangle ont les mêmes mesures que deux angles d'un autre triangle alors les 2 triangles sont semblables.

<u>Vocabulaire</u> : Lorsque deux triangles sont semblables :
- Les angles égaux sont dit homologues.
- Les côtés opposés à des angles égaux sont dits homologues.
- Les sommets des angles égaux sont dits homologues.

Exemple : Les triangles ABC et EFD sont semblables (voir-figure ci-dessous). Compléter le tableau suivant :



Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{FED}$	A et E	[AB] et [EF]
$\widehat{CBA}$ et $\widehat{DFE}$	B et F	[BC] et [FD]
$\widehat{BCA}$ et $\widehat{FDE}$	C et D	[CA] et [DE]

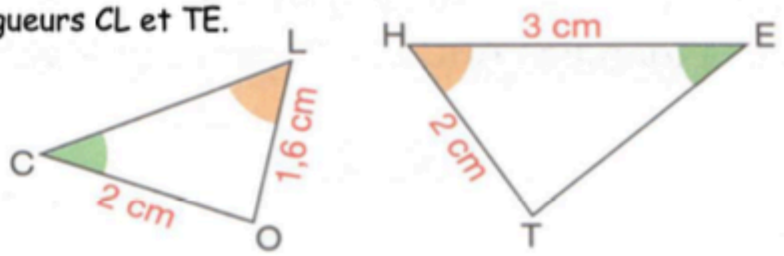
B) Triangles semblables et longueurs

Propriété 2 : Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Remarque : on peut exprimer cette propriété sous la forme suivante

Si deux triangles sont semblables, alors l'un des triangles est un agrandissement de l'autre

Exemple : Les triangles COL et THE sont semblables (voir figure ci-dessous).
Calculer les longueurs CL et TE.



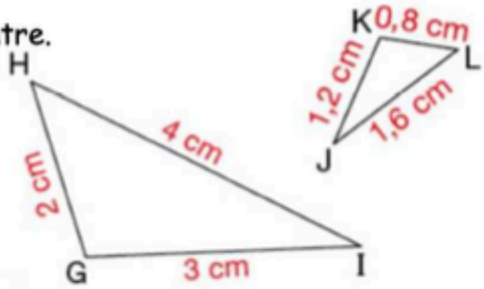
Les triangles COL et THE sont semblables, donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles et on a :

$\frac{HT}{LO} = \frac{EH}{CL} = \frac{TE}{OC}$ soit $\frac{2}{1{,}6} = \frac{3}{CL} = \frac{TE}{2} = 1{,}25$.

Ce qui donne $\frac{3}{CL} = 1{,}25$ donc $CL = \frac{3}{1{,}25} = 2{,}4$ cm et $\frac{TE}{2} = 1{,}25$ donc $TE = 2 \times 1{,}25 = 2{,}5$ cm.

Propriété 3 (réciproque de la propriété 2) : Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles deux à deux, alors ces triangles sont semblables.

Exemple 1 : On considère les deux triangles GHI et JKL ci-contre.
Ces triangles sont-ils semblables ?



On remarque que $\frac{0{,}8}{2} = \frac{1{,}2}{3} = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4$

Donc $\frac{KL}{HG} = \frac{JK}{GI} = \frac{JL}{HI} = 0{,}4$

Comme les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles, alors les triangles GHI et JKL sont semblables.