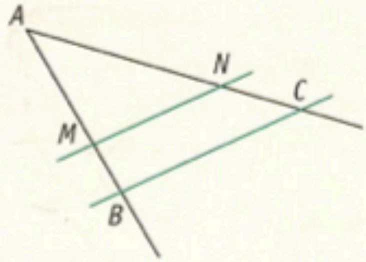
Le théorème de Thalès

a) Énoncé

THÉORÈME DE THALÈS (ADMIS)

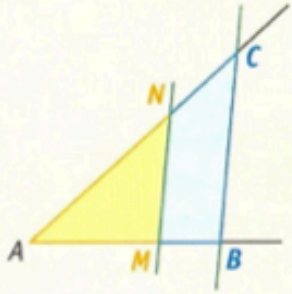
A, B et C sont trois points non alignés ;
si un point M appartient à la demi-droite $[AB)$,
si un point N appartient à la demi-droite $[AC)$ et
si les droites (MN) et (BC) sont parallèles,
alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.



b) Conséquence du théorème de Thalès

■ **EXEMPLE :**

Sur la figure ci-contre, on sait que :
- A, B et C sont trois points non alignés ;
- $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$;
- $(MN) // (BC)$.



Ainsi, les deux demi-droites de même origine $[AB)$ et $[AC)$, coupées par deux parallèles (MN) et (BC), forment deux triangles AMN et ABC.
D'après le théorème de Thalès, les longueurs des côtés de ces deux triangles sont **proportionnelles**.
Ainsi, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN

■ **Remarques :**
- Dans cet exemple, le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC.

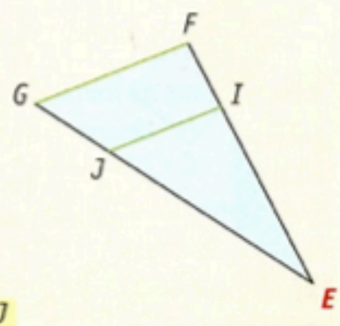
Le rapport de cette réduction est le quotient $\dfrac{AM}{AB}$, avec $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.
- Dans ce même exemple, le triangle ABC est un **agrandissement** du triangle AMN.

Le rapport de cet agrandissement est le quotient $\dfrac{AB}{AM}$, avec $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.
- Dans cet exemple, les segments $[NC]$ et $[MB]$ ne sont pas des côtés de ces triangles.

C'est pourquoi leurs longueurs NC et MB n'apparaissent pas dans l'égalité des rapports.

■ **Remarque :** Le théorème de Thalès peut être appliqué dans un triangle.

■ **EXEMPLE :** Dans le triangle EFG, on sait que :
$I \in [EF]$; $J \in [EG]$ et $(GF) // (IJ)$.
- Comme le point I appartient au segment $[EF]$, il appartient aussi à la demi-droite $[EF)$.
- De même, le point J appartient à la demi-droite $[EG)$.
- Les droites (GF) et (IJ) sont parallèles.



Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{EI}{EF} = \frac{EJ}{EG} = \frac{IJ}{FG} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Triangle } EIJ \\ \leftarrow \text{Triangle } EFG \end{matrix}$$