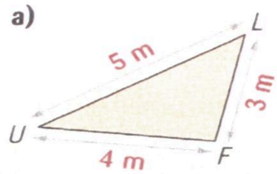
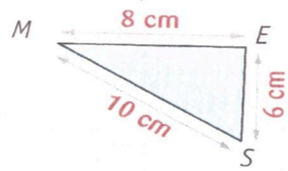
Chapitre 3 : La réciproque du théorème de Pythagore

Exercice 1 : Justifier que chacun des triangles ci-dessous est rectangle et préciser en quel sommet.

a)



b)



a) Dans le triangle ULF

$UL^2 = 5^2 = 25$

$UF^2 + LF^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$UL^2 = UF^2 + LF^2$

La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée

donc LUF est un triangle rectangle en F

b) Dans le triangle MES

$MS^2 = 10^2 = 100$

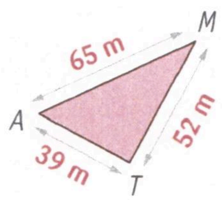
$ME^2 + ES^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$MS^2 = ME^2 + ES^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore

le triangle MES est rectangle en E.

Exercice 2 : Démontrer que le triangle MAT est rectangle.



Dans le triangle MAT

$MA^2 = 65^2 = 4225$

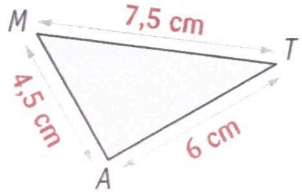
$MT^2 + AT^2 = 52^2 + 39^2 = 2704 + 1521 = 4225$

$MA^2 = MT^2 + AT^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore

le triangle MAT est rectangle en T.

Exercice 3 : Démontrer que le triangle MAT est rectangle.



Dans le triangle MAT

$MT^2 = 7,5^2 = 56,25$

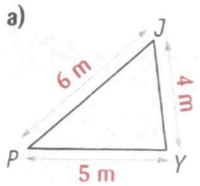
$MA^2 + AT^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$

$MT^2 = MA^2 + AT^2$

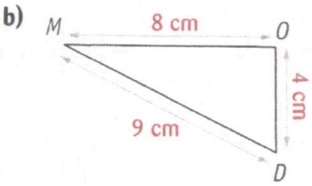
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle MAT est rectangle en A.

Exercice 4 : Justifier que chacun des triangles ci-dessous n'est pas rectangle.

a)



b)



a) dans le triangle PYJ

$JP^2 = 6^2 = 36$

$PY^2 + YJ^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

$JP^2 \neq PY^2 + YJ^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle PYJ n'est pas un triangle rectangle.

b)

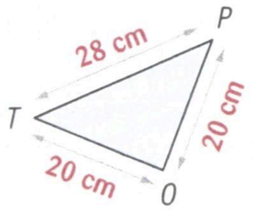
Dans le triangle MOD

$MD^2 = 9^2 = 81$ $MO^2 + OD^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$

$MD^2 \neq MO^2 + OD^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle MOD n'est pas un triangle rectangle.

Exercice 5 : Démontrer que le triangle TOP n'est pas rectangle.



Dans le triangle TOP

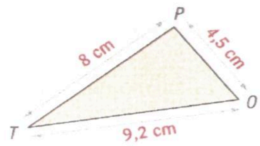
$TP^2 = 28^2 = 784$

$TO^2 + OP^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800$

$TP^2 \neq TO^2 + OP^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle POT n'est pas un triangle rectangle.

Exercice 6 : Démontrer que le triangle TOP n'est pas rectangle.



Dans le triangle POT

$OT^2 = 9,2^2 = 84,64$

$PO^2 + PT^2 = 4,5^2 + 8^2 = 20,25 + 64 = 84,25$

$OT^2 \neq PO^2 + PT^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle TOP n'est pas rectangle.

Exercice 7 :

1) Dans un triangle MAN, on a : $MN^2 + NA^2 = MA^2$. Que dire du triangle MAN ?

On peut dire que le triangle MAN est rectangle en N

2) Dans un triangle EOR de plus long côté [EO], on a : $EO^2 \neq ER^2 + RO^2$. Que dire du triangle EOR ?

on peut simplement affirmer que ce triangle n'est pas rectangle.

Exercice 8 : Dans chaque cas, préciser si le triangle est rectangle.

a) AB = 5 cm / BC = 6 cm / AC = 8 cm

Dans le triangle ABC

$AC^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + BC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

$AB^2 + BC^2 \neq AC^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.

b) RS = 8 m / ST = 10 m / RT = 6 m

Dans le triangle RST

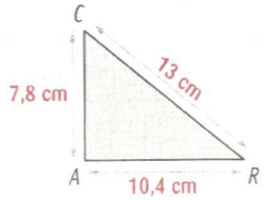
$ST^2 = 10^2 = 100$

$RS^2 + RT^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$ST^2 = RS^2 + RT^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle RST est rectangle en R.

Exercice 9 : Préciser si le triangle est rectangle ou non. Justifier la réponse.



Dans le triangle CAR

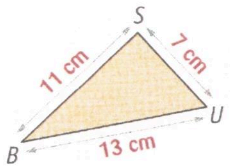
$CR^2 = 13^2 = 169$

$CA^2 + AR^2 = 7,8^2 + 10,4^2 = 169$

$CR^2 = CA^2 + AR^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle CAR est rectangle en A.

Exercice 10 : Préciser si le triangle est rectangle ou non. Justifier la réponse.



Dans le triangle BUS

$BU^2 = 13^2 = 169$

$BS^2 + SU^2 = 11^2 + 7^2 = 121 + 49 = 170$

$BU^2 \neq BS^2 + SU^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle BUS n'est pas un triangle rectangle.

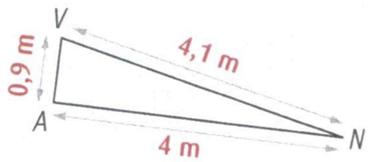
Exercice 11 : Préciser si le triangle est rectangle ou non. Justifier la réponse.

Dans le triangle VAN

$VN^2 = 4,1^2 = 16,81$

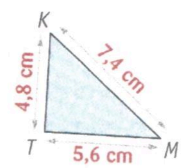
$VA^2 + AN^2 = 0,9^2 + 4^2 = 16,81$

$VN^2 = VA^2 + AN^2$



donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle VAN est rectangle en A

Exercice 12 : Préciser si le triangle est rectangle ou non. Justifier la réponse.



Dans le triangle KTM

$KM^2 = 7,4^2 = 54,76$

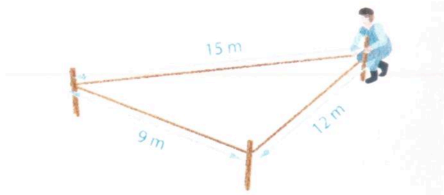
$KT^2 + TM^2 = 4,8^2 + 5,6^2 = 54,4$

$KM^2 \neq KT^2 + TM^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle KTM n'est pas rectangle.

Exercice 13 : Maçonnerie

Un maçon souhaite s'assurer de la perpendicularité de sa future construction. Pour cela, il tend des fils attachés à des piquets comme dans le schéma ci-dessous. Sa construction sera-t-elle correcte ?



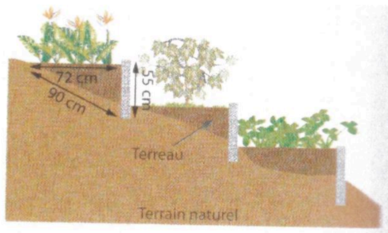
$15^2 = 225$

$12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle est rectangle
donc sa construction est correcte.

Exercice 14 : Au jardin

Marie-Claire vient d'aménager son jardin dont le terrain naturel est en pente. Elle a souhaité créer des massifs en escaliers. Pour cela, elle a installé des bordures de 55 cm de hauteur pour maintenir le terreau qu'elle a apporté pour faire ses plantations. Mais elle a un doute : ses bordures sont-elles bien perpendiculaires au sol qu'elle a crée avec le terreau ?



$90^2 = 8100$

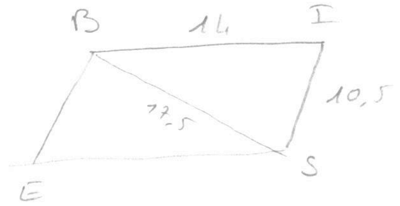
$72^2 + 55^2 = 5184 + 3025 = 8209$

$8100 \neq 8209$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle n'est pas rectangle
donc les bordures ne sont pas perpendiculaires au sol.

Exercice 15 : BISE est un parallélogramme tel que BI = 14 cm, IS = 10,5 cm et BS = 17,5 cm.

a. Faire un schéma à main levée de ce parallélogramme.

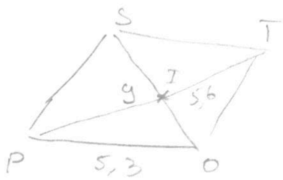


b. Montrer que BISE est un rectangle.

Dans le triangle BIS
$BS^2 = 17,5^2 = 306,25$ $BI^2 + IS^2 = 14^2 + 10,5^2 = 306,25$
$BS^2 = BI^2 + IS^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
BIS est un triangle rectangle en I
on sait que BISE est un parallélogramme
$\widehat{BIS} = 90°$
or si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle
donc BISE est un rectangle.

Exercice 16 : STOP est un parallélogramme tel que SO = 9 cm, TP = 5,6 cm et OP = 5,3 cm. I est le point d'intersection des diagonales [SO] et [TP].

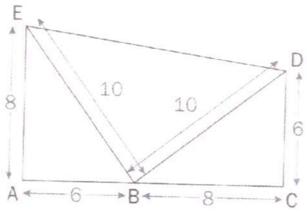
1. Faire un schéma à main levée.



2. Montrer que STOP est un losange.

Dans le triangle PIO.
$PO^2 = 5,3^2 = 28,09$
$PI^2 + IO^2 = 4,5^2 + 2,8^2 = 28,09$
$PO^2 = PI^2 + IO^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
PIO est un triangle rectangle en I
on sait que STOP est un parallélogramme
$(SO) \perp (PT)$
or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange
donc STOP est un losange.

Exercice 17 : Sur cette figure, A, B et C sont alignés. Que peut-on dire du polygone :



a. ABE ?

Dans le triangle ABE

$BE^2 = 10^2 = 100$

$AE^2 + BA^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$BE^2 = AE^2 + BA^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABE est rectangle en A

b. BCD ?

De même le triangle BCD est rectangle en C

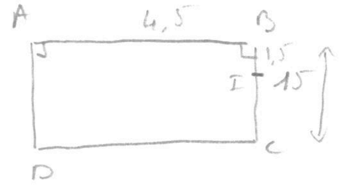
c. BED ?

on sait que $BE = BD$

donc le triangle BED est un triangle isocèle en B.

Exercice 18 : ABCD est un rectangle avec AB = 4,5 cm, BC = 15 cm. I est le point appartenant à [BC] tel que BI = 1,5 cm.

1. Faire un schéma.



2. Calculer AI^2 et DI^2. Le triangle AID est-il rectangle ? Justifier.

Dans le triangle rectangle AIB.
d'après le théorème de Pythagore
$AI^2 = AB^2 + BI^2$
$= 4,5^2 + 1,5^2$
$= 22,5$

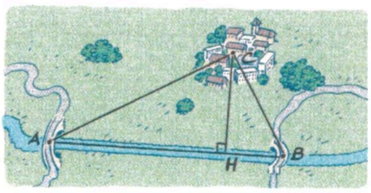
Dans le triangle rectangle DIC
d'après le théorème de Pythagore
$DI^2 = IC^2 + CD^2$
$= 13,5^2 + 4,5^2$
$= 202,5$

Dans le triangle AID
$AD^2 = 15^2 = 225$
$AI^2 + DI^2 = 22,5 + 202,5 = 225$
$AD^2 = AI^2 + DI^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle AID est rectangle en I.

Exercice 19 : Les ponts

Pour traverser une rivière en voiture, on peut emprunter deux ponts A et B distants de 10 km. Un village C est à 8 km du pont A et à 6 km du pont B. On note H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC.
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.



a. ABC est-il un triangle rectangle ? Justifier.

Dans le triangle ABC
$AB^2 = 10^2 = 100$
$AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle ABC est rectangle en C.

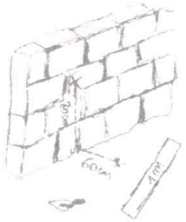
b. Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire la distance CH.

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ km}^2$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{10 \times HC}{2} = 5 \times HC = 24$

donc $HC = \frac{24}{5} = 4{,}8$ km.

Exercice 20 : Maçonnerie 2 !

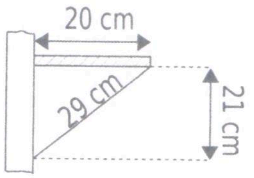


Pour savoir si son mur est bien vertical, un maçon utilise une règle de 1m et fait une marque à 60 cm sur le sol et une autre à 80 cm du sol sur le mur. En plaçant la règle, il vérifie la verticalité du mur. Explique pourquoi.

$0{,}8^2 + 0{,}6^2 = 0{,}64 + 0{,}36 = 1$

Grace à la réciproque du théorème de Pythagore, on montre la verticalité du mur.

Exercice 21 :



Pour vérifier s'il a bien posé une étagère de 20 cm de profondeur sur un mur parfaitement vertical, M. Brico a pris les mesures marquées sur le schéma ci-contre. Son étagère est-elle parfaitement horizontale ?

$29^2 = 841$

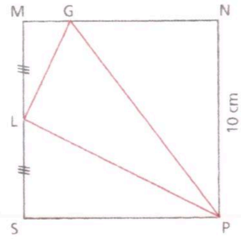
$20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$

$29^2 = 20^2 + 21^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, l'étagère est perpendiculaire au mur

donc elle est parfaitement horizontale.

Exercice 22 : Dans la figure ci-dessous, MNPS est un carré et MG = 2,5 cm.



1. Calculer LP et GP

Dans le triangle rectangle PLS
d'après le théorème de Pythagore
$LP^2 = LS^2 + SP^2$
$= 5^2 + 10^2$
$= 25 + 100$
$= 125$
donc $LP = \sqrt{125} \approx 11,2$
Dans le triangle rectangle PGN
d'après le théorème de Pythagore
$GP^2 = GN^2 + NP^2$
$= 7,5^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25$
donc $GP = \sqrt{156,25} = 12,5$

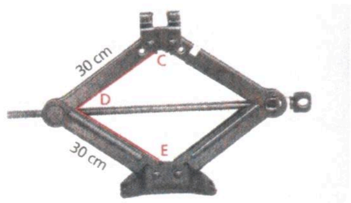
2. Quelle est la nature du triangle LGP ? Justifier.

Dans le triangle rectangle MLG
d'après le théorème de Pythagore
$LG^2 = MG^2 + ML^2 = 2,5^2 + 5^2 = 31,25$
donc $LG = \sqrt{31,25} \approx 5,6$

Dans le triangle LGP
$LP^2 + LG^2 = 125 + 31,25 = 156,25$
$GP^2 = 156,25$

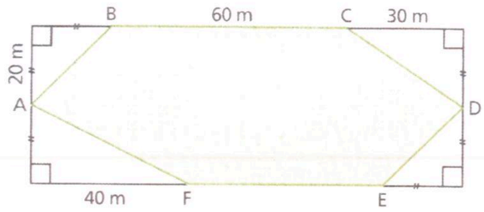
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle LGP est rectangle en L.

Exercice 23 : Le cric est un outil qui sert à lever des véhicules. Quand l'angle $\widehat{CDE}$ est droit, quelle est la longueur du segment [CE] ?



Dans le triangle rectangle CDE
d'après le théorème de Pythagore
$CE^2 = CD^2 + DE^2$
$= 30^2 + 30^2 = 900 + 900 = 1800$
donc $CE = \sqrt{1800} \approx 42,4$ cm.

Exercice 24 : Sylvain vient d'acheter ce terrain dans le but de proposer des cours de zumba en plein air.



1. Il a acheté 12 rouleaux de grillage soudé comme celui ci-dessous. En aura-t-il assez pour clôturer son terrain tout en laissant un passage de 3 m pour pouvoir y pénétrer ?

calcul de AB : $AB = \sqrt{20^2 + 20^2} \approx 28,3$
calcul de AF : $AF = \sqrt{20^2 + 40^2} \approx 44,7$
calcul de DE : $DE = \sqrt{20^2 + 20^2} \approx 28,3$
calcul de CD : $CD = \sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36,1$
Perimètre du polygone : 247,4

distance des 12 rouleaux : $12 \times 20 = 240$

Il n'aura pas assez de grillage.

2. Sylvain a acheté 23 paquets de semences de gazon comme celui ci-contre. En aura-t-il assez ?

$\mathcal{A}$ (terrain) $= 110 \times 40 - \frac{20 \times 20}{2} - \frac{20 \times 20}{2} - \frac{30 \times 20}{2} - \frac{40 \times 20}{2}$

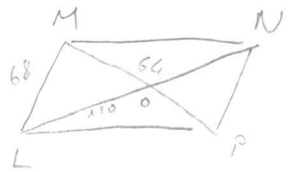
$= 4400 - 200 - 200 - 300 - 400$
$= 3300$

Nombre de paquets : $3300 \div 150 = 22 < 23$

Il aura assez de paquets de semence de gazon.

Exercice 25 : MNPL est un parallélogramme de centre O tel que : ML = 68 mm / MP = 64 mm / LN = 120 mm

1. Faire un schéma à main levée.



2. Que représente le point O pour les diagonales du parallélogramme MNPL ?

on sait que MNPL est un parallélogramme
or si un quadrilatère est un parallélogramme alors
ses diagonales se coupent en leur milieu
donc O milieu de [MP]
O milieu de [NL].

3. Démontrer que les diagonales de MNPL sont perpendiculaires.

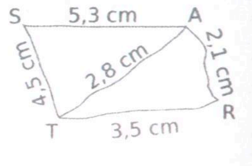
Dans le triangle MOL
$ML^2 = 68^2 = 4624$
$MO^2 + OL^2 = 32^2 + 60^2 = 1024 + 3600 = 4624$
$ML^2 = MO^2 + OL^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle MOL est rectangle
donc $(MO) \perp (OL)$

4. En déduire la nature particulière de MNPL.

on sait que MNPL est un parallélogramme
$(MP) \perp (NL)$
or si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires
alors c'est un losange

donc MNPL est un losange.

Exercice 26 : Voici un schéma à main levée de deux triangles TAS et RAT dont les mesures réelles sont indiquées.



1. Démontrer que AST est un triangle rectangle.

Dans le triangle TAS

$AS^2 = 5,3^2 = 28,09$

$AT^2 + TS^2 = 2,8^2 + 4,5^2 = 7,84 + 20,25 = 28,09$

$AS^2 = AT^2 + TS^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle AST et rectangle en T.

2. Démontrer que ART est un triangle rectangle.

Dans le triangle ART

$TR^2 = 3,5^2 = 12,25$

$AT^2 + AR^2 = 2,8^2 + 2,1^2 = 7,84 + 4,41 = 12,25$

$TR^2 = AT^2 + AR^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ART est rectangle en A

3. Quelle est la nature du quadrilatère STRA ?

on sait que $(RA) \perp (AT)$

$(ST) \perp (AT)$

donc $(RA) // (ST)$

donc STRA est un trapèze.