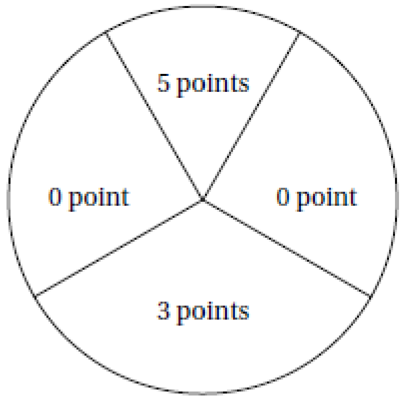
Un corrigé du DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES N°7

Exercice 1 *Pondichéry, avril 2011*

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-contre.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc : $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}\, p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}\, p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

On a : $p_3 = 2\, p_5$ et $p_0 = 3\, p_5$

D'où : $p_0 + p_3 + p_5 = 6\, p_5 = 1$

Donc : $p_5 = \frac{1}{6}$

Et ainsi : $p_3 = \frac{1}{3}$ et $p_0 = \frac{1}{2}$.

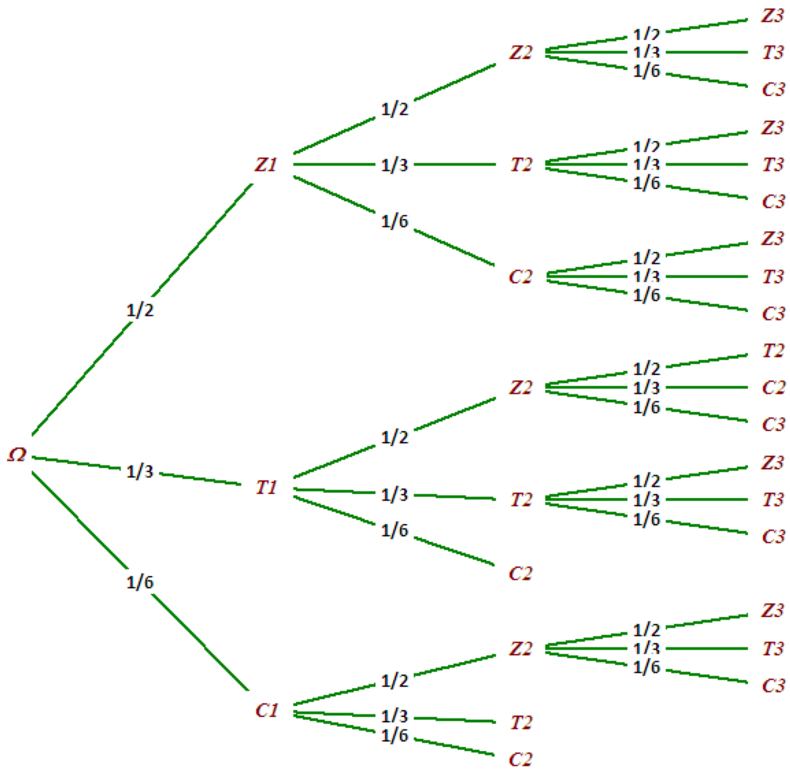
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les trois lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de deux lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'événement "le joueur gagne la partie en 2 lancers".

On note G_3 l'événement "le joueur gagne la partie en 3 lancers".

On note L l'événement "le joueur perd la partie".

On note $P(A)$ la probabilité d'un événement A.



a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que : $P(G_2) = \frac{5}{36}$. Soit $n \in \{1; 2; 3\}$.

Notons Z_n (resp. T_n et C_n) l'événement "le joueur obtient 0 (resp. 3 et 5) point(s) au $n^{\text{ème}}$ lancer".

Remarque : le n° du lancer doit apparaître dans le nom de l'événement, afin de pouvoir parler de leur intersection (sinon, $C \cap C = C$, et cela n'aurait plus de sens dans l'exercice).

$\{T_1 \cap C_2, C_1 \cap T_2, C_1 \cap C_2\}$ forme une partition de G_2.

On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$P(G_2) = P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) + P(C_1 \cap C_2)$

$P(G_2) = P_{T_1}(C_2) \times P(T_1) + P_{C_1}(T_2) \times P(C_1) + P_{C_1}(C_2) \times P(C_1)$

$P(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.

On admettra, dans la suite, que : $P(G_3) = \frac{7}{36}$.

b. En déduire $P(L)$.

$\{G_2, G_3, L\}$ forme une partition de l'univers Ω, on a donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(\Omega) = P(G_2) + P(G_3) + P(L)$

$P(L) = 1 - P(G_2) - P(G_3)$

$P(L) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{7}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
L'événement contraire est : "le joueur ne gagne aucune partie".
On considère **l'épreuve de Bernoulli** suivante : "un joueur joue une partie", de **succès** "le joueur gagne la partie", dont la **probabilité** est : $p = 1 - P(L) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
On répète 6 fois cette épreuve**, de manière identique et indépendante**.
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 6$ et : $p = \frac{1}{3}$.
La variable aléatoire comptabilisant le nombre de parties gagnées vérifie donc la loi binomiale. Ainsi, la probabilité que le joueur ne gagne aucune partie est égale à : $\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$.
Donc la probabilité qu'il gagne au moins une partie est : $1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729}$.

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : –2, 1 et 3.

a. Donner la loi de probabilité de X.

Elle est résumée dans le tableau suivant, où $i \in \{1; 2; 3\}$:

Gain x_i	–2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

En effet : $P(X = -2) = P(L)$; $P(X = 1) = P(G_3)$; $P(X = 3) = P(G_2)$.

b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

$E(X) = -2 \times \frac{2}{3} + \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{-4\times12+7+15}{36} = -\frac{26}{36} = -\frac{13}{18}$

Comme l'espérance est négative, alors le jeu est défavorable au joueur.

Exercice 2 *Polynésie, septembre 2010*

Partie 1

Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par g (x) = $e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en +∞.

En +∞, nous avons une F.I, procédons alors à une transformation d'écriture :

g (x) = $e^x\left(1 - x + \frac{1}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (limite usuelle)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (limite d'un quotient), $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - x + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$ (limite d'une somme)

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ g (x) = $-\infty$ (limite d'un produit).

2. Etudier les variations de la fonction g.

Pour tout x de [0 ; +∞[, on a : g'(x) = $e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.
Comme $e^x > 0$ pour tout x, alors g'(x) est du signe de – x, c'est-à-dire négatif sur [0 ; +∞[.
Donc g est décroissante sur [0 ; +∞[.

3. Donner le tableau de variation de g.

On a ainsi le tableau ci-contre :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\quad$ $-$
$g(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$

4. **a)** Démontrer que l'équation g (x) = 0 admet sur [0 ; +∞[une unique solution. On note α cette solution.

On va appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à g sur l'intervalle [0 ; +∞[:

g est continue (car somme de fonctions continues) et strictement décroissante sur [0 ; +∞[

g (0) = 2 et $\lim\limits_{x \to +\infty}$ g (x) = −∞

Comme 0 ∈]−∞ ; 2], alors l'équation g (x) = 0 admet une unique solution α dans [0 ; +∞[.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

g (1) = 1 et g (2) ≈ −6,4 donc 1 < α < 2

g (1,2) ≈ 0,3 et g (1,3) ≈ −0,1 donc 1,2 < α < 1,3

g (1,27) ≈ 0,04 et g (1,28) ≈ −001 donc 1,27 < α < 1,28.

c) Démontrer que : $\mathrm{e}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Comme g (α) = 0, alors $\mathrm{e}^{\alpha} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha} + 1 = 0$,

ce qui équivaut à : $\mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = -1$, c'est-à-dire à : $\mathrm{e}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de g (x) suivant les valeurs de x.

Comme g est strictement décroissante sur [0 ; +∞[, et que g (α) = 0

alors on en déduit que : g (x) > 0 sur [0 ; α[et g (x) < 0 sur]α ; +∞[.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur [0 ; +∞[telle que A (x) = $\frac{4x}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, A' (x) a le même signe que g (x), où g est la fonction définie dans la partie 1.

Pour tout x de [0 ; +∞[, on a : A'(x) = $\frac{4\,(\mathrm{e}^{x}+1)-4x\,\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} = \frac{4\,(\mathrm{e}^{x}-x\,\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} = \frac{4\,\mathrm{g}(x)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$.

Comme 4 et $(\mathrm{e}^{x}+1)^2$ sont strictement positifs, alors A'(x) a le même signe que g (x).

2. En déduire les variations de la fonction A sur [0 ; +∞[.

Grâce à la question 5 de la partie 1, on a le tableau ci-contre :

x	0		α		$+\infty$
A'(x)		+	0	−	
A (x)	0	$\nearrow$	A(α)	$\searrow$	

Partie 3

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par : f (x) = $\frac{4}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de ($\mathcal{C}$) de coordonnées $(x\ ; \mathrm{f}\ (x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ; 0)$, *P* est le point de l'axe des abscisses, de même abscisse que *M*

Q le point de coordonnées $(0\ ; \mathrm{f}\ (x))$ *Q* est le point de l'axe des ordonnées, de même ordonnée que *M*

1. Démontrer que l'aire du rectangle *OPMQ* est maximale lorsque *M* a pour abscisse α.

On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

L'aire du rectangle *OPMQ* est égale à : $|x| \times |f(x)|$, ce qui vaut x f (x) car x et f (x) sont des quantités positives. L'aire du rectangle est donc égale à A (x).

On a vu, à la question 2 de la partie 2, que A (x) est maximal pour x = α.

Donc l'aire du rectangle *OPMQ* est bien maximale lorsque *M* a pour abscisse α.

2. Le point *M* a pour abscisse α.

La tangente (T) en *M* à la courbe ($\mathcal{C}$) est-elle parallèle à la droite (*PQ*) ?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une démarche possible :

a) calculer le coefficient directeur de (T), c'est f ′(α).

b) calculer le coefficient directeur de la droite (*PQ*), c'est $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$.

c) voir si ces deux coefficients sont égaux.

a) Pour tout x de [0 ; +∞[, $f'(x) = \frac{-4\,e^x}{(e^x+1)^2}$

On a donc : $f'(\alpha) = \frac{-4\,e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$. C'est le coefficient directeur de (T).

b) On a : $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{0 - f(\alpha)}{\alpha - 0} = \frac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)}$. C'est le coefficient directeur de (*PQ*).

c) Or $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ (cf. question 1.4.c), ce qui équivaut à $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$, soit encore à : $\alpha\, e^\alpha = 1 + e^\alpha$

On a donc :

D'une part : $f'(\alpha) = \frac{-4\,e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = \frac{-4\,e^\alpha}{(\alpha e^\alpha)^2} = \frac{-4}{\alpha^2\,e^\alpha}$.

D'autre part : $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)} = \frac{-4}{\alpha^2\,e^\alpha}$.

Les deux coefficients directeurs sont bien égaux, et donc la tangente (T) est bien parallèle à la droite (*PQ*).