Dérivation rappels 1S

I Nombre dérivé, Tangente à la courbe :

1. Nombre dérivé d'une fonction en un point :

Définition : Soit f une fonction d'ensemble de définition noté D_f de courbe représentative Cf.
Soit a un réel appartenant à D_f et h un réel non nul tel que $a + h \in Df$.

- **On dit que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie ℓ lorsque h tend vers zéro.**
- **Le nombre ℓ est alors appelé nombre dérivé de la fonction f en a et on note $\ell = f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.**
- **$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe Cf au point A(a ; $f(a)$).**
- **Lorsque $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable au point a.**

Remarque : le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux d'accroissement de la fonction f entre a et a + h.

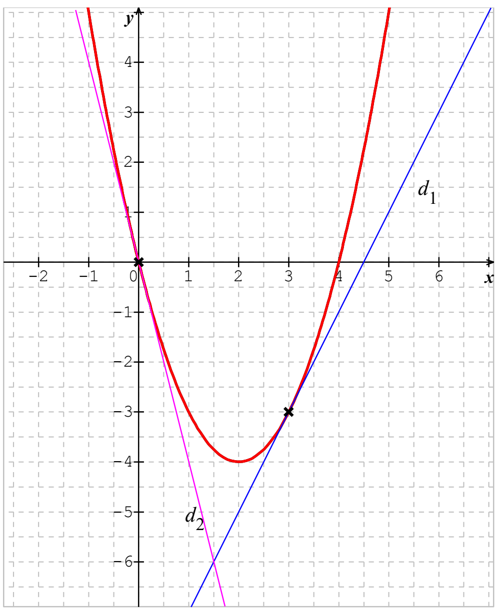
2. Interprétation graphique, tangente à la courbe :

Définition et propriétés : Soit f une fonction, a un réel appartenant à l'ensemble de définition de f et C_f la courbe représentative de f dans un repère (O, I, J) du plan.

- **Si f est dérivable en a, on appelle tangente à C_f au point A(a ; $f(a)$) la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.**
- **L'équation réduite de la tangente en A dans le repère (O, I, J) est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.**

Application : Lire graphiquement un nombre dérivé :

Soit g une fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.
Les droites d_1 et d_2 sont les tangentes aux points d'abscisses respectives 3 et 0. Déterminer graphiquement g'(3) et g'(0).



Le coefficient directeur des tangentes est égal au nombre dérivée.
Graphiquement on lit : g'(3) = 2 et g'(0) = - 4

II Fonctions dérivées :

1. Définition :

Définitions :

- **On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel a de I.**
- **La fonction qui, à tout nombre réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f et est notée f'. On a ainsi $f' : x \longmapsto f'(x)$.**

Formulaires des dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	f est définie sur	f est dérivable sur	Fonction dérivée f'
Constante : $x \longmapsto k$ avec k nombre réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité : $x \longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Affine : $x \longmapsto ax + b$ avec a et b deux réels connus	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carré : $x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Puissance : $x \longmapsto x^n$ avec n entier $\geqslant 2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
Racine carrée : $x \longmapsto \sqrt{(x)}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(x)}}$

2. **Opérations sur les fonctions dérivées :**

Propriété :

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I dont les fonctions dérivées respectives sont u' et v'.
Alors :

- ***la fonction somme u + v est dérivable sur I et (u+v)' = u' + v'***
- ***si k est un réel, la fonction ku est dérivable sur I est (ku)' = ku'***
- ***La fonction produit* uv *est dérivable sur* I *et* (uv)' = u'v + uv'**
- ***La fonction*** $\dfrac{1}{v}$ ***est dérivable pour tout*** $x \in$ **I** ***tel que*** **v(x) ≠0** ***et*** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
- ***La fonction*** $\dfrac{u}{v}$ ***est dérivable pour tout*** $x \in$***I tel que*** **v(x) ≠0** ***et*** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

III Fonction dérivée et variations :

1. Du sens de variation au signe de la dérivée :

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- **Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) \geqslant 0$.**
- **Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) \leqslant 0$.**
- **Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) = 0$.**

2. Du signe de la dérivée au sens de variation :

Théorème (admis) : Le principe de Lagrange :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- **Si pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) > 0$ (sauf en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$) alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) < 0$ (sauf en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$) alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout $x \in$ I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.**

Pour étudier les variations d'une fonction on recherche le signe de sa dérivée

Remarque : Il est parfois plus rapide d'invoquer des résultats concernant les fonctions de référence que d'utiliser la dérivée.