Correction DST 7

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$.

1 a. Montrer que *f* est une fonction paire.

$f(-x)=\cos(-x)+\frac{1}{2}\cos(-2x)+1$ Or $\cos(-X)=\cos(X)$

donc $f(-x) = \cos(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+1=f(x)$ donc *f* est paire.

b. Montrer que *f* est une fonction périodique de période 2π .

$$f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)+\frac{1}{2}\cos(2(x+2\pi))+1$$

$= \cos(x+2\pi)+\frac{1}{2}\cos(2x+4\pi)+1$ Or $\cos(X+2\pi)=\cos(X)$

donc $f(x+2\pi) = \cos(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+1=f(x)$ donc *f* est 2π-périodique.

c. Puisque *f* est paire, C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Puisque *f* est 2π-périodique, les variations de *f* se reproduisent par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Bilan : *f est définie sur* $\mathbb{R}$ *mais...*

- *f* étant 2π -périodique, on l'étudie sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi;\pi]$.
- *f* étant paire, on l'étudie sur [0 ; π].

Une fois C_f tracée sur [0 ; π], une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées permettra de tracer C_f sur $[-\pi;0]$. On aura alors C_f sur un intervalle d'amplitude 2π et on va reproduire le motif par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2. En utilisant la relation $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$, montrer que, pour tout nombre réel *x* de l'intervalle $[0;\pi]$, $f'(x)=-\sin(x)(1+2\cos(x))$.

$$f(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$$

donc $f'(x)=-\sin(x)+\frac{1}{2}\times(-2)\times\sin(2x)=-\sin(x)-\sin(2x)$

or $\sin(2x)=\sin(x+x)=2\sin x\cos x$

$$f'(x)=-\sin(x)-2\sin x\cos x=-(\sin x)(1+2\cos x)$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ dans l'intervalle $[0:\pi]$.

Sur $[0:\pi]$, $-\sin(x)<0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1+2\cos(x)$

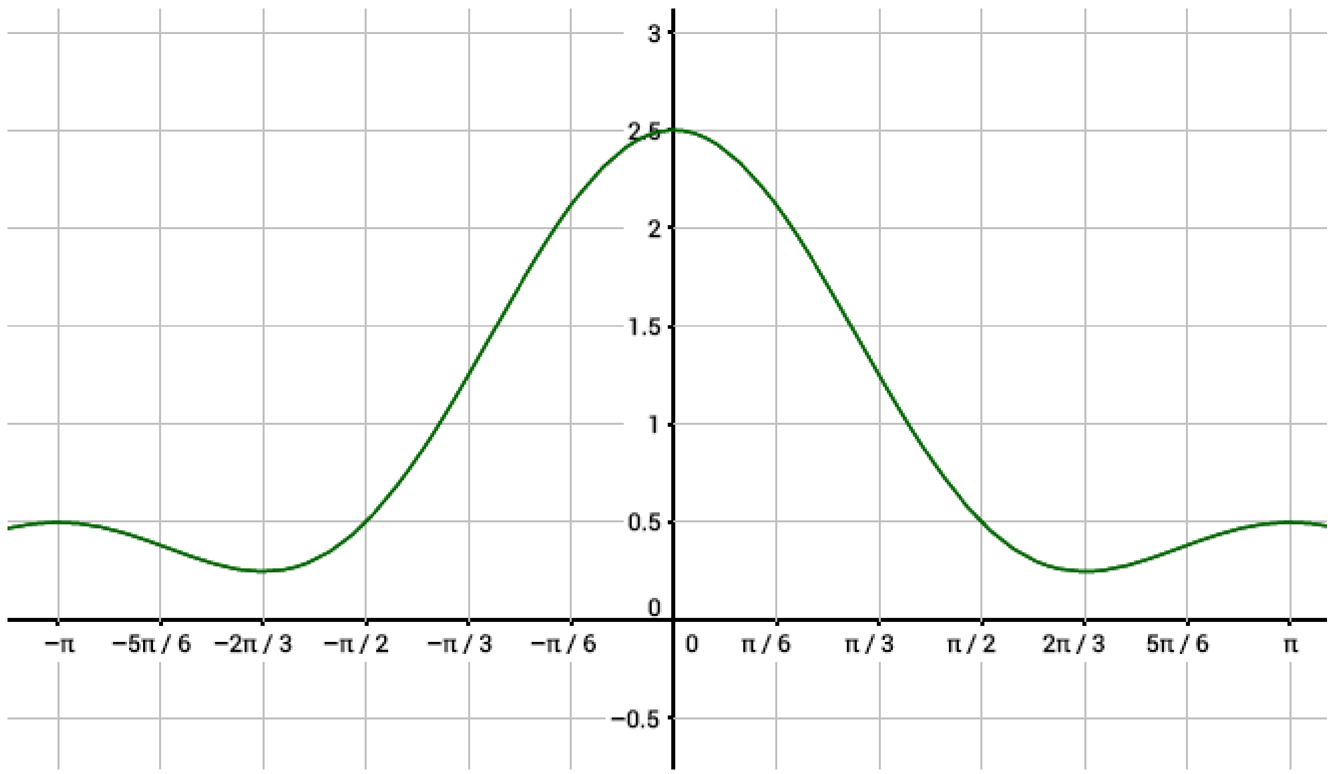
$1+2\cos x>0$ © $\cos x>\frac{-1}{2}$ © $0<x<\frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
signe de $-\sin x$	–	⋮	–
signe de $1+2\cos x$	+	0	–
signe de $f'(x)$	–	0	+

4. DL tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;\pi]$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	–	0	+	0
$f(x)$	2,5	↘	0,25	↗	1

Voici ci-dessous, la courbe représentative de *f* sur l'intervalle $[-\pi;+\pi]$. On attend que vous indiquiez les tangentes horizontales.



Exercice 2

La fonction *f* est définie sur $\mathrm{I}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

1. On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$

2. $\quad C_f$ admet pour asymptotes :

- les droites d'équation $x=-2$ et $x=1$
- l'axe des abscisses au voisinage de + et - ∞

3. Le tableau de variations de la fonction *f* est *:*

x	$-\infty$		-2		-0,5		1		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

4. Parmi les expressions suivantes*, on peut en éliminer deux :*

$f(x)=\dfrac{-2}{(x-2)(x+1)}$ ne convient pas : elle est pas définie en -2 .

$f(x)=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}$ ne convient pas :

un argument : $f(2)=\dfrac{2}{4}+2=2,5$; or graphiquement on a $f(2)<1$.

un autre argument : $f'(x)=-\dfrac{2}{(x+2)^2}-\dfrac{2}{(x-1)^2}$ donc $f'(x)<0$ sur I. Or la fonction étudiée n'est pas strictement décroissante sur I.

$f(x)=\dfrac{2}{(x+2)(x-1)}$ est définie sur I, les limites en $-\infty$ et 1 sont celles attendues ainsi que des images comme $f(0)$, $f(2)$ ...

Exercice 3 $\quad$ *f* est définie sur $\mathrm{I}=]-\infty;1[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. a) En $-\infty$, on a une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré.

On peut simplifier par *x* car au voisinage de l'infini, $x\neq0$.

$$\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ donc par quotient des limites on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

Au voisinage de 1 : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 2x+1=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1=0^{-}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$

b) Sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, on en déduit que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

Sachant que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$, on en déduit que la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à C_f.

c) Étudier la position relative de C_f par rapport à l'asymptote horizontale, c'est étudier le signe de la différence $f(x)-2$.

$f(x)-2=\ldots=\frac{3}{x-1}$

Pour tout réel $x<1$, on a $x-1<0$ donc $f(x)-2<0$ soit $f(x)<2$

On en déduit que C_f est *en dessous* de son asymptote d'équation $y=2$ ..

2. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

$f'(x)=\ldots=-\frac{3}{(x-1)^2}$ donc $f'(x)<0$ pour tout réel *x* de I et *f* est décroissante sur I.

x	$-\infty$		1
signe de f'		$-$	
f	2	$\searrow$	$-\infty$

3. Déterminer un nombre A de I tel que pour tout $x<A$, $2-f(x)<0,05$.

$2-f(x)=-\frac{3}{x-1}$ et $2-f(x)<0,05 \iff \frac{-3}{x-1}<0,05$

Pour tout réel *x* de I, $x-1<0$

donc $\frac{-3}{x-1}<0,05 \iff -3>0,05\times(x-1) \iff \ldots \iff x<-59$.

Pour tout réel strictement inférieur à -59, on peut dire que l'écart entre C_f et l'asymptote est inférieur à 0,05.